
**エネルギー環境論**
**担当教官：谷本 潤 教授**

**第5回講義**

# 経済性評価2

---

## 効用（Utility）

**人が判断する価値，評価のこと．**

### （1）順序効用（Ordinal Utility）

**価値が順序だけで表される．**

A：**あけみ**　B:**ベティー**　C:**キャッシー に対する好悪**

$$A \succ B \wedge B \succ C \Rightarrow A \succ B \succ C$$

$\succ$ :**つつき（選好強さを表す）**

### （2）基数効用（Cardinal Utility）

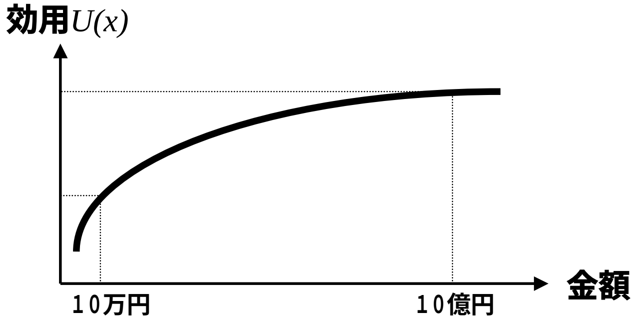
**選好順序を実数で表現したもの．選好を量として表現する．**

$$A \succ B \succ C \Leftrightarrow U(A) > U(B) > U(C)$$

$U(\cdot)$**を効用関数**（Utility Function）**と云う．**

50万円しか持たない人にとって10万円は大金であるが，10億円の資産がある人にとって10万円は端金に過ぎない．

→効用の増加分は前者の方が大きい．

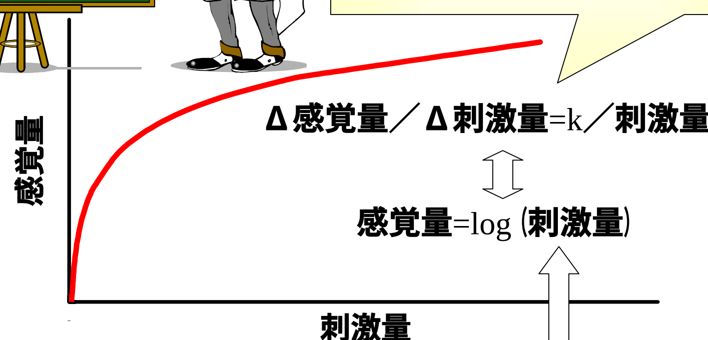



一般に効用は逓減する．これを「**限界効用**がある」と云う．

効用の逓減を表す効用関数として、logや√などがよく使われる．
効用関数は逓減する→効用関数の曲線形は上凸（$U(x)''<0$）．


効用を人間の感覚量として捉えると…

ウェーバー·フェヒナーの法則は人間の効用関数はlogで近似出来ることを示唆している




人の感覚は物理的刺激が増すと次第に逓減する

## 期待効用仮説 (Expected Utility Hypothesis)

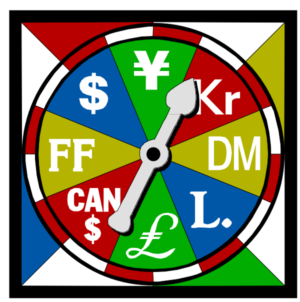
くじ α があり，1等の商品は$x_1$，その出現確率$p_1$のように表記し，まとめて以下のように表す．

$$\alpha = [\, x_1, x_2, \cdots, x_k; p_1, p_2, \cdots, p_k \,]$$

このとき，人がこのくじを購入するか否かは，各結果の価値(すなわち効用) の期待値を基準に意志決定される (フォン・ノイマン＆モルゲンシュテルン)．これは以下で表される効用関数$U(\cdot)$が存在することを示唆している．

$$U(\alpha) = p_1 U(x_1) + p_2 U(x_2) + \cdots + p_k U(x_k)$$

## アレーのパラドクス




いま，以下の4種のくじがあるとする．

$a_1$ ＝ [ 10000円, 0円; 0.1 , 0.9 ]
$a_2$ ＝ [ 15000円, 0円; 0.09, 0.91 ]
$a_3$ ＝ [ 10000円, 0円; 1 , 0 ]
$a_4$ ＝ [ 15000円, 0円; 0.9 , 0.1 ]

経験的には $a_2 \succ a_1 \wedge a_3 \succ a_4$ なる選好．

$U$( 10000円 )=$x$，$U$( 15000円 )=$y$とおいて，期待効用仮説を適用すると，

$$a_2 \succ a_1 \Leftrightarrow 0.09y > 0.1x$$
$$a_3 \succ a_4 \Leftrightarrow x > 0.9y$$

不等式は相矛盾する．本来は以下の関係が正しい．

$$a_3 \succ a_4 \Rightarrow a_1 \succ a_2$$

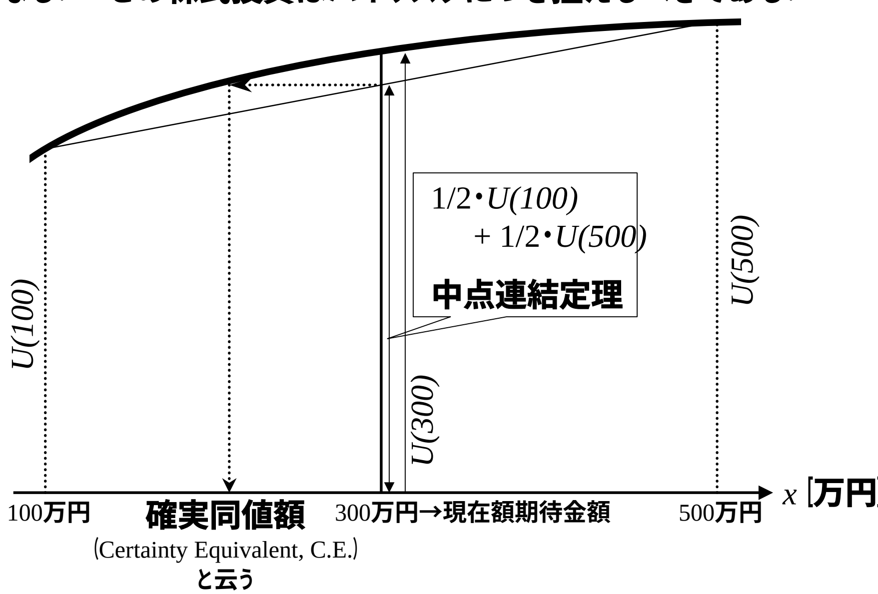
## リスクプレミアム

いま300万円の資金があり．ある会社の株式に投資するか否かを意志決定する場面を考える．上昇すれば株価は500万円，下落すれば100万円になることは分かっているが，昇騰，下落は五分五分であると云う．金利によるキャピタルゲインは考えない．あなただったらこの儲け話にのりますか？

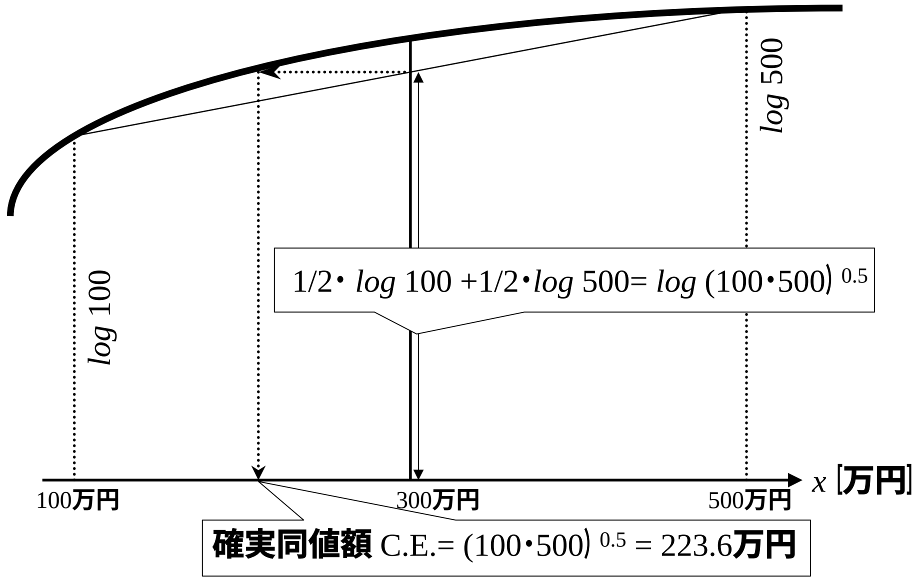
1/2･500万円+1/2･100万円=300万円→期待値からは評価出来ない

**効用逓減および期待効用仮説の出番になる！**

効用曲線が上凸であれば，必ず $U(300) > 1/2 \cdot U(100) + 1/2 \cdot U(500)$ となる．→この株式投資はハイリスクにつき控えるべきである．

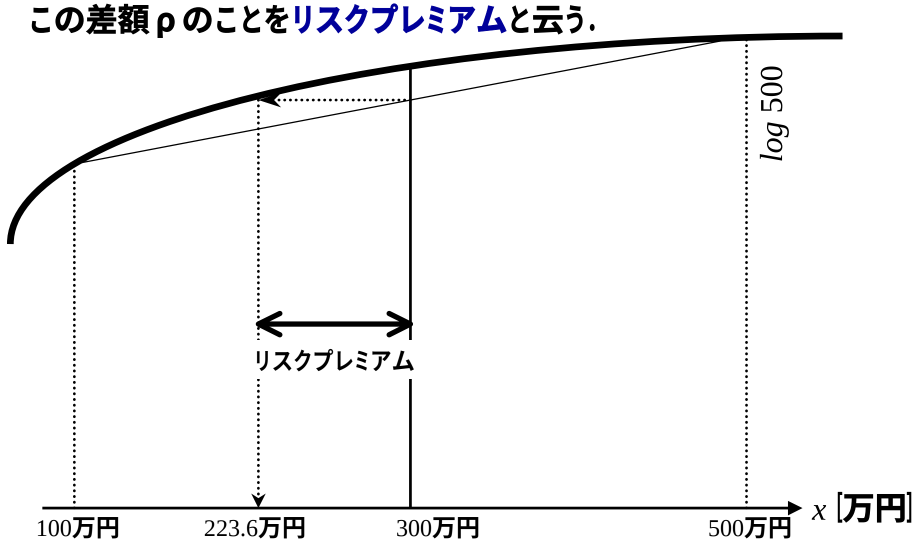


いま効用関数を $U(x)=\log x$ としてみると，




逆に云えば，現在期待金額と確実同値額 (C.E.) との差額；
300-223.6=76万円を貰えばリスクと引き換えにこの投資に参加してもよい，と判断するだろう.

この差額 ρ のことを**リスクプレミアム**と云う.



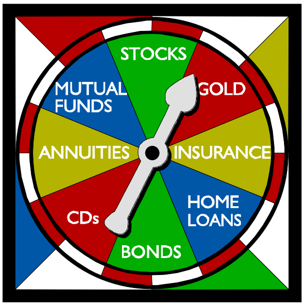
## より**リスキー**とは？

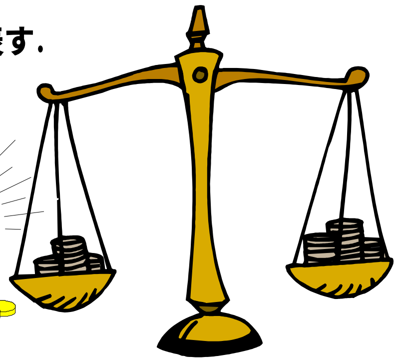
Def:

**2つの確率変数$X,Y$（ただし$E(X)=E(Y)$）に対し，$X$が$Y$よりリスキーとは，上に凸な<u>全ての</u>関数$U$に対して，**

$$E[U(X)] \leqq E[U(Y)]$$

**である．ただし，$E(\cdot)$=は期待値を表す．**



## 例題

**20万8千円の2つの富くじ$X,Y$はどちらがリスキーだろう？**

$X$ ＝ [　1万円,100万円　; 0.8　, 0.2　]
$Y$ ＝ [ 10万円,1090万円; 0.99, 0.01 ]
**効用関数としては自然対数（底がeの対数=$LN$）$log$を用いる．**

**まず期待値を見てみよう．**
$E(X)=0.8\cdot 1+0.2\cdot 100=20.8$万円
$E(Y)=0.99\cdot 10+0.01\cdot 1090=20.8$万円…**期待値は同額である．**
**次は分散（=平均値まわりの2次モーメント）を見てみる．**
$V(X)= 0.8\cdot(1-20.8)^2+0.2\cdot (100-20.8)^2 =1568.16$
$V(Y)= 0.99\cdot(10-20.8)^2+0.01\cdot (1090-20.8)^2 =11547.36$
**よって標準偏差は（=√分散）それぞれ，39.6万円，107.5万円となる．**
**標準偏差だけで判断すると，$Y$の方がリスキーだと思ってしまう．**

「リスキー」の定義に則って，対数効用の期待値を見てみる．

$E[U(X)]$ = 0.8・$log$ 1+0.2・$log$ 100 =0.92
$E[U(Y)]$ = 0.99・$log$ 10+0.01・$log$ 1090 =2.35

よって定義により，富くじ$X$の方がよりリスキーと判定される．

**課題　（保険Insurance；リスクプレミアムの応用）**

保険は中世欧州に地中海貿易の安全（破船や海賊による被害）への投資として確立された海上保険が原型とされている．

3000ドルの車体盗難保険をかけたい．保険料は年間30ドルで，盗難の確率は0.1%（年間の生起確率）であると云う．この保険はかけるべきか否か？もしかけるべきであれば保険料がいくらまでが許容範囲になるか？（逆にかけるべきでないのなら保険料がいくら以下なら加入すべきか？）
ただし，金銭$x$に対する効用関数は，

$U(x)=-x^2$　　（$x \leqq 0$；損失の場合）
$U(x)=\sqrt{x}$　　（$x > 0$；利得の場合）

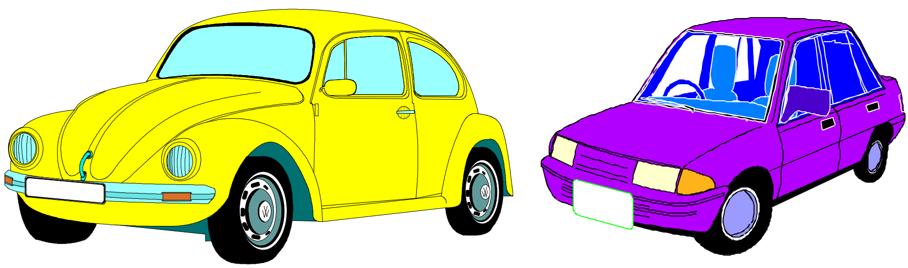
とせよ．

まず期待金額で評価してみる．

加入の場合：
$E(X)$=0.001・(-30)+0.999・（-30）=-30ドル
非加入の場合：
$E(X)$=0.001・(-3000)+0.999・(0)=-3ドル

これだけで見ると，加入しない方がよさそうだ．

本当か？期待効用で評価しないといけないのだ！



**解答**

効用の期待値で評価すると，

加入の場合：

$E[U(X)]$ = 0.001・ $U(-30)$ + 0.999・ $U(-30)$ = $U(-30)$ =-900ドル

非加入の場合：

$E[U(X)]$ = 0.001・ $U(-3000)$ + 0.999・ $U(0)$ = 0.001・ $U(-3000)$

=-9000ドル

被害に見合う保険料の限界価格は，
$U(-x)$ = -9000
を解いて，
$x = \sqrt{9000}$=<u>94.87［ドル］</u>

完全保険（complete insurance）：契約者の損失が完全に保証される保険
保険学的公平：(プレミアム)/(補償額)=(生起確率)．これは，(プレミアム)×(契約者数)=(補償額)×(生起件数)なるレクシスの法則から導かれる．