

# M0001 計測技術概論

## 講義資料

九州大学大学院総合理工学研究院  
谷本 潤

F棟205号室  
(Tel)092-583-7600

(e-mail) tanimoto@cm.kyushu-u.ac.jp

### 参考書

- (1)谷口・堀込 著 「計測工学」 森北出版
- (2)押田・木村・前田 著 「計測工学」 コロナ社
- (3)土屋 編 「大学課程 計測工学」 オーム社
- (4)西原・山藤 著 「計測システム工学の基礎」森北出版
- (5)日野 著 「スペクトル解析」 朝倉書店

- 1 -

## 1. はじめに

JIS技術用語集(JIS Z 8103 計測用語)参考

**計測**: 何らかの目的をもって、事物を量的にとらえるための方法・手段を考究し、実施し、その結果を用いること。

**測定**: ある量を、基準として用いる量と比較し、数値または符号を用いて表すこと。

(例)長さを測定するには、1メートルという基準となる量を定めておき、測定すべき長さがこの基準量の何倍であるかを示す数値を求める

**計量**: 公的に取り決められた標準を基礎とする計測のこと。

**観測**: ある事象を調べるために、事実を認める行為。

**測量**: 地球表面上にある各地点間の距離、角度、高低差などを測定し、対象物の位置あるいは形状を定める技術。

### 計測機器の利用形態

- (1)工業プロセスや操作の監視
- (2)工業プロセスや操作の制御
- (3)実験的工学解析

- 2 -

## 2. 単 位

国際単位系 (SI 単位系: Le Systeme International d' Unite' s)  
: “世界共通に使える実用単位系”

### 2.1 国際単位系 (SI)

#### (a) SI 基本単位

量	基本単位		定 義
	単位の名称	単位記号	
時間	秒	s	1秒は、セシウム133の原子の基底状態の2つの超微細準位の間の遷移に対応する放射の9192631770周期の継続時間。
長さ	メートル	m	1メートルは、1/299792458秒の時間に光が真空中を伝わる行程の長さ。
質量	キログラム	kg	1キログラムは、(重力でも力でもない)質量の単位であって、それは国際キログラム原器(直径、高さとも39mmの円柱形で、白金90%、イリジウム10%の合金)の質量に等しい。

- 3 -

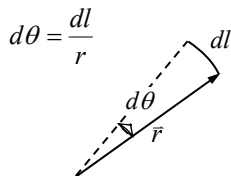
#### (a) SI 基本単位のつづき

量	基本単位		定 義
	単位の名称	単位記号	
電流	アンペア	A	1アンペアは、真空中に1メートルの間隔で平行に置いた、無限に小さい円形断面積を有する無限に長い2本の直線状導体のそれぞれを流れ、これらの導体の長さ1メートルごとに $2 \times 10^{-7}$ ニュートンの力を及ぼし合う不変の電流。
熱力学温度	ケルビン	K	1ケルビンは、水の3重点の熱力学温度の1/273.16。
物質質量	モル	mol	1モルは、0.012kgの炭素12の中に存在する原子の数と等しい数の要素粒子、または要素粒子の集合体(組成が明確にされた物に限る)で構成された系の物質質量とし、要素粒子または要素粒子の集合体を特定して使用する。
光度	カンデラ	cd	1カンデラは、周波数 $540 \times 10^{12}$ ヘルツの単色放射を放出し、所定の方向におけるその放射強度が1/683ワット毎ステラジアンである光源の、その方向における強度。

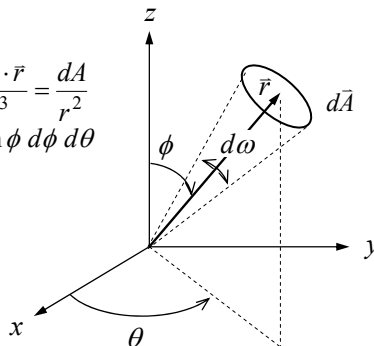
- 4 -

(b) 補助単位系

量	補助単位		定義
	名称	記号	
平面角	ラジアン	rad	ラジアンは、円の周上でその半径の長さに等しい長さの弧を切り取る2本の半径の間に含まれる平面角である。
立体角	ステラジアン	sr	ステラジアンは、球の中心を頂点とし、その球の半径を1辺とする正方形の面積と等しい面積をその球の表面上で切り取る立体角である。



$$d\omega = \frac{d\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{dA}{r^2} = \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$



立体角の補足説明

平面角：所謂、普通に云う“角度”のこと、平面上の1点から2本の半直線が出てるとき両者の開き具合を云う。弧度法では、半径rの円の円弧の長さlとすると、 $l/r$ で角度の大きさを表す、すなわち、 $\theta = l/r$  [rad]。

角度は3次元空間内でも定義出来る。これを平面角に対して立体角とよぶ。錐体の頂点は立体角を持っていると云う。頂点を中心として半径rの球を描いたとき、球の表面には錐体の側面との交わりによって閉曲面が描かれる。この閉曲面中の球面の一部の面積をSとしたとき（球面の一部だから真ん中は影らんでいる）、弧度法に倣って（しかし面積比の次元で）以下のように立体角を定義する。単位をステラジアンと云う。

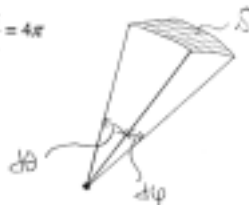
$$\Omega = S/r^2 \text{ [sr]}$$

定義より、全球体に対する立体角は $4\pi$ 、半球面に対するそれは $2\pi$ である。



何部本(538)式で微小立体角  $d\Omega$  を極座標表示すると、 $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi$  とあるが、これは以下のように理解する。この表式が立体角の定義に合ったものであれば、下図の微小な表面面積を意味する筈。これを真角度について  $\phi$  から  $\pi/2$  まで積分カマせば1/8球になる、8倍すれば1球になるが、積分を実行すると、確かに球の表面積に一致する。よって、上記表式は正しいことが示された。

$$8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} d\Omega = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi = 8 \left[ -\cos\theta \right]_0^{\pi/2} \Big|_0^{\pi/2} = 8 \frac{\pi}{2} = 4\pi$$



これ工学部エネ科の熱・統計力学 I の講義資料；  
 マクスウェル・ボルツマン分布を説明する過程で  
 立体角が登場！

## (c) SI 組立単位－基本単位で表されるもの

量	単位の名称	記号
面積	平方メートル	m <sup>2</sup>
体積	立方メートル	m <sup>3</sup>
速さ, 速度	メートル毎秒	m/s
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s <sup>2</sup>
密度(質量密度)	キログラム毎立方メートル	kg/m <sup>3</sup>
質量体積(比体積)	立方メートル毎キログラム	m <sup>3</sup> /kg
モル質量	キログラム毎モル	kg/mol
モル体積	立方メートル毎モル	m <sup>3</sup> /mol
流量(体積流量)	立方メートル毎秒	m <sup>3</sup> /s
質量流量	キログラム毎秒	kg/s
(物質量の)濃度	モル毎立方メートル	mol/m <sup>3</sup>

- 7 -

## (c) SI 組立単位つづき－固有の名称で表されるもの

量	単位の名称	記号	他のSI単位 による表記	SI基本単位 による表記
力	ニュートン	N		kg・m・s <sup>-2</sup>
圧力, 応力	パスカル	Pa		
エネルギー, 仕事, 熱量	ジュール	J		
工率, 仕事率, 動力, 熱流	ワット	W		
セルシウス温度(摂氏温度)	セルシウス度	°C		K
周波数	ヘルツ	Hz		s <sup>-1</sup>
電気量	クーロン	C	A・s	
静電容量	ファラッド	F	C/V	A <sup>2</sup> ・s <sup>4</sup> ・kg <sup>-1</sup> ・ m <sup>-2</sup>
電位差(電圧), 起電力	ボルト	V	W/A	

- 8 -

(c) SI 組立単位つづき－固有の名称で表されるもの

量	単位の名称	記号	他のSI単位による表記	SI基本単位による表記
電気抵抗	オーム	$\Omega$	$V \cdot A^{-1}$	
コンダクタンス	ジーメン	S	$\Omega^{-1}$	$A^2 \cdot s^3 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2}$
磁束	ウェーバ	Wb	$V \cdot s$	
磁束密度	テスラ	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
インダクタンス	ヘンリー	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
光束	ルーメン	lm	$Cd \cdot sr$	
照度	ルクス	lx	$lm \cdot m^{-2}$	

(c) SI 組立単位つづき－固有の名称を含むもの

量	記号	SI基本単位による表記
粘度	$Pa \cdot s$	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
熱流密度	$W/m^2$	$kg \cdot s^{-3}$
熱伝導率	$W/(m \cdot K)$	$kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
熱容量, エントロピー	$J/K$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
質量エネルギー (比エネルギー)	$J/kg$	$m^2 \cdot s^{-2}$
体積エネルギー	$J/m^3$	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
モルエネルギー	$J/mol$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
質量熱容量 (比熱容量), 質量エントロピー	$J/(kg \cdot K)$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
モル熱容量, モルエントロピー	$J/(mol \cdot K)$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

### (d) SI 接頭語

単位に乘ぜられる倍数	接頭語	
	名称	記号
$10^{24}$	ヨタ	Y
$10^{21}$	ゼタ	Z
$10^{18}$	エクサ	E
$10^{15}$	ペタ	P
$10^{12}$	テラ	T
$10^9$	ギガ	G
$10^6$	メガ	M
$10^3$	キロ	k
$10^2$	ヘクト	h
10	デカ	da

単位に乘ぜられる倍数	接頭語	
	名称	記号
$10^{-1}$	デシ	d
$10^{-2}$	センチ	c
$10^{-3}$	ミリ	m
$10^{-6}$	マイクロ	$\mu$
$10^{-9}$	ナノ	n
$10^{-12}$	ピコ	p
$10^{-15}$	フェムト	f
$10^{-18}$	アト	a
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-24}$	ヨクト	y

- 11 -

## 2.2 SI に属さない単位

SI と併用される, SI に属さない単位

分(min), 時(h), 日(d), 度( $^{\circ}$ ), 分( $'$ ), 秒( $''$ ), リットル(l, L), トン(t)

※使用はできる限り避けることが望ましい単位:

アール(a), バール(bar), オングストローム( $\text{\AA}$ )

トル(Torr=mmHg), 標準大気圧(atm), カロリー(cal)

## 2.3 単位の表記上の注意

単位記号: 原則としてローマン体の小文字(量記号はイタリック体)

(例外) 人名・固有名詞は先頭の1文字は大文字

リットルはLを使用して良い

## 2.4 補足

### ◎温度の単位

$$T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

$$t_{\text{C}}(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9} \{ t_{\text{F}}(^{\circ}\text{F}) - 32 \}$$

- 12 -

## ◎ カ・圧力・応力の単位

○質量 $m = 1 \text{ kg}$ の物体に作用して加速度 $a = 1 \text{ m/s}^2$ を生じさせる力 $F$ は、

$$F = ma = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N} \quad (\text{ニュートン})$$

○面積 $A = 1 \text{ m}^2$ に力 $F = 1 \text{ N}$ が垂直で均一にかかる時の圧力 $p$ は、

$$p = F/A = 1 \text{ N}/1 \text{ m}^2 = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} \quad (\text{パスカル})$$

・大気圧:  $101325 \text{ Pa}$ を標準大気圧

・絶対圧力とゲージ圧力:  $p_g(\text{ゲージ圧力}) = p(\text{絶対圧力}) - p_a(\text{大気圧力})$

## ◎ エネルギー・仕事・熱量の単位

○物体に力 $F = 1 \text{ N}$ が働いて距離 $l = 1 \text{ m}$ 動かす仕事 $W$ は、

$$W = Fl = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J} \quad (\text{ジュール})$$

○単位時間に移動(転換など)するエネルギー量を仕事率, 工率, 動力という

時間 $t = 1 \text{ s}$ 当たりのエネルギーが $E = 1 \text{ J}$ のときの仕事率 $P$ は、

$$P = E/t = 1 \text{ J}/1 \text{ s} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W} \quad (\text{ワット})$$

- 13 -

## ◎ 密度, 比重量, 比重

### 密度;

SI単位で使われる. 単位体積あたりの質量. 単位は $[\text{kg/m}^3]$ .

### 比重量;

単位体積当たりの重量. 重量は重さであり, 力の次元を有する.

よって比重量の単位は, SI単位で記述すると $[\text{N/m}^3]$ .

$$[\text{N/m}^3] = [\text{kg m/s}^2 / \text{m}^3] = [\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-2}].$$

日常語で「重さ $1 \text{ kg}$ 」とは, 地球上でその物体に $1[\text{kgf}]$ の力が掛かっているとの意味. 工学単位では慣用的に $[\text{kgf}]$ を $[\text{kg}]$ と表すことがあるので, 工学単位で比重量を表すと $[\text{kg/m}^3]$ となる. 工学単位では比重量はSI単位における密度の意味で使われる. ここで(工学単位) = (SI単位)で表記すると,

$$\text{質量} \quad 1[\text{kgf s}^2/\text{m}^3] = 9.8[\text{kg}]$$

$$\text{力} \quad 1[\text{kgf}] = 9.8[\text{N}]$$

だから, SI単位の密度 $\rho$   $[\text{kg/m}^3]$ と工学単位で慣用表記した比重量

$\gamma$   $[\text{kg/m}^3]$ は単位の表記も同じ, 値も同じになる.

### 比重;

ある物体の密度と $4^\circ\text{C}$ ,  $101.3 \text{ kPa}$ における水の密度 $\rho$  ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ) との比. よって無次元.

- 14 -

## ◎ SI単位と工学単位

単位系

- 重力単位系 (工学単位系)
- 絶対単位系 (物理単位系)
  - 国際単位系(SI)
  - CGS単位系
  - MKS単位系

SI

- SI単位
  - 基本単位 (7個)
  - 補助単位 (2個)
  - 組立単位 (固有の名称をもつ組立単位 (18個) などの組立単位)
- 接頭語 (16個) およびSI単位の10の整数乗法

国際単位系(SI)の内容

SI単位の10の整数乗法

SI	記号	定義
1		
$10^1$		
$10^{-1}$		
$10^2$		
$10^{-2}$		
$10^3$		
$10^{-3}$		
$10^4$		
$10^{-4}$		
$10^5$		
$10^{-5}$		
$10^6$		
$10^{-6}$		
$10^7$		
$10^{-7}$		
$10^8$		
$10^{-8}$		
$10^9$		
$10^{-9}$		
$10^{10}$		
$10^{-10}$		
$10^{11}$		
$10^{-11}$		
$10^{12}$		
$10^{-12}$		
$10^{13}$		
$10^{-13}$		
$10^{14}$		
$10^{-14}$		
$10^{15}$		
$10^{-15}$		
$10^{16}$		
$10^{-16}$		
$10^{17}$		
$10^{-17}$		
$10^{18}$		
$10^{-18}$		
$10^{19}$		
$10^{-19}$		
$10^{20}$		
$10^{-20}$		

SI単位の10の整数乗法 (16個)

接頭語	記号	乗数
テラ	T	$10^{12}$
ギガ	G	$10^9$
メガ	M	$10^6$
キロ	k	$10^3$
ヘクト	h	$10^2$
デカ	da	$10^1$
デシ	d	$10^{-1}$
センチ	c	$10^{-2}$
ミリ	m	$10^{-3}$
マイクロ	$\mu$	$10^{-6}$
ナノ	n	$10^{-9}$
ピコ	p	$10^{-12}$
フェムト	f	$10^{-15}$
アト	a	$10^{-18}$
ゼプト	z	$10^{-21}$
エクサ	E	$10^{18}$
ペタ	P	$10^{15}$
テラ	T	$10^{12}$

SI単位の10の整数乗法 (16個) およびSI単位の10の整数乗法

1 [W] = 0.86 [kcal/h]

### [演習1]間違いを正せ

(1) 単位と次元は同じである。

\_\_\_\_\_

(2) °Cはセンチグレードとよぶ。

\_\_\_\_\_

(3) キログラムは[kg]でも[Kg]でもよい。

\_\_\_\_\_

(4) 平面角の度[°], 分['], 秒["]はSIで使える。

\_\_\_\_\_

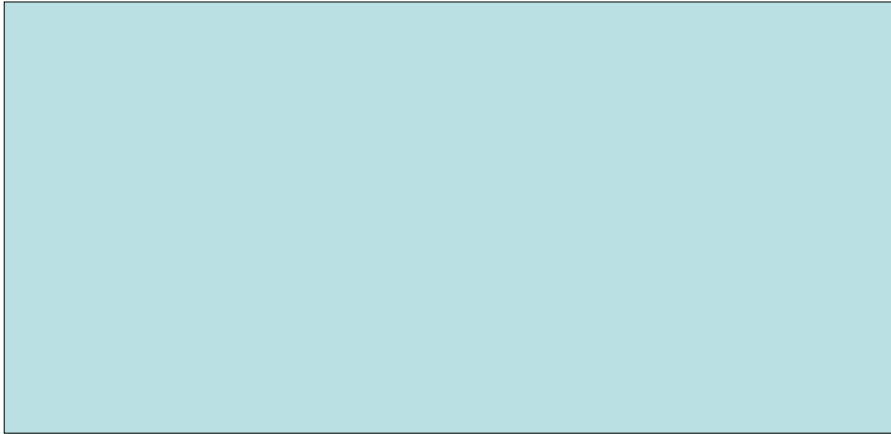
(5) [dB]はSI単位でないので用いない。

\_\_\_\_\_



**【演習2】**

長さ18cmのゴムひもに重さ1.2[kgf]のおもりを吊したところ、22cmに伸びた。バネ定数 $k$ と非減衰固有振動数 $q$ を求めよ。



**【演習3】**

10Lの水を30分で50°C上昇させるために必要な100Vのヒータの抵抗 $R$ を求めよ。但し、効率 $\eta$ は95%とする。



### 3. 誤差・不確かさ

#### 3.1 測定誤差

**誤差 (error)**とは測定値から真の値を引いた値

誤差 = 測定値 - 真の値

誤差率 = 誤差 / 真の値

誤差百分率 = 誤差率 × 100

**真の値 (true value)**とは観念的な値で、一般に求めようとしても求められない。測定値は測定のためにわずかであっても違いを生じるのが一般的。

#### 誤差の原因

(1) 系統的誤差 (systematic error) : 規則性があり、測定値に偏り (bias) を与える  
予め調べておけば補正できる。

① 機器誤差 (器差, instrumental error)

目盛の誤差, 零点調整の狂い, 経年変化などによる

② 理論誤差 (theoretical error)

測定に用いた方法 (原理) に起因する誤差

③ 個人誤差 (personal error)

測定者固有の癖によって, 測定上, 調整上に生じる誤差

※ 環境誤差: 測定する場所の温度, 湿度, 圧力などによる誤差

- 19 -

(2) 偶然誤差 (accidental error) :

突き止められない原因, あるいは制御できないような測定条件, 環境条件  
などの変動によって偶発的に生じる誤差

→ 測定値のばらつきを生じる

(3) 過失誤差, 間違い (error by mistake) :

測定機器の誤動作や測定者の不注意によって生じる誤差

#### 長さの測定例

##### 図3.1 ヒストグラム

測長機 (最小目盛  $1 \mu\text{m}$ ) で,  
ある物体の長さを50回測定  
した結果

$$f_i = \frac{n_i}{50 \times 0.1}$$

※ 相対頻度 = 頻度 / 測定回数

測定回数を増やすと, ヒスト  
グラムは連続的な曲線に近づく

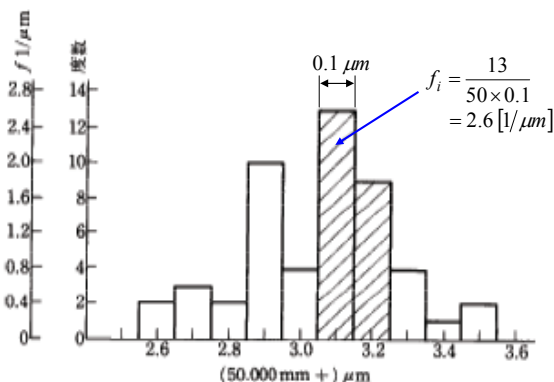


図3.1 ヒストグラム

- 20 -

## 測定値の統計的分布

- ・過失なく同じ測定を無限回繰り返すと測定値と頻度の関係は連続的な滑らかな曲線となる
- ・測定値のばらつき(偶然誤差)により山形の広がり
- ・偏り(系統的誤差)により測定値の最も確からしい値(最確値),  $m$  即ち頻度が最大となる測定値と真の値とのずれ

$m$  : 母平均 (population mean)

- ・**母集団** (population)  
同一条件のもとで求められる仮想的な全ての測定値(無限個)の集合
- ・**試料** (sample)  
母集団からランダムに求められ有限個の測定値の一組

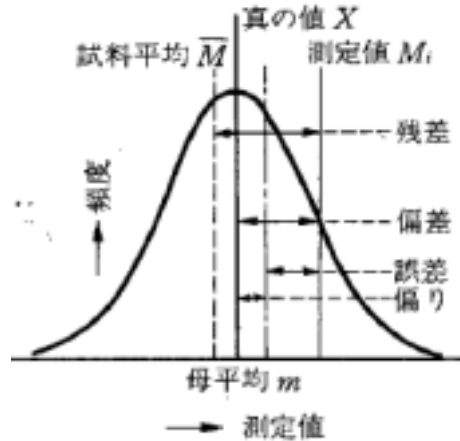


図3. 2 測定値の頻度分布

- 21 -

- ・**試料平均** (sample mean)

$$\text{試料平均 } \bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

$$\text{母平均 } m = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{M}$$

$$\text{測定値 } M_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

- ・**誤差** (error)

$$\text{誤差} = \text{測定値} - \text{真の値} = M_i - X$$

- ・**偏差** (deviation)

$$\text{偏差} = \text{測定値} - \text{母平均} = M_i - m$$

- ・**残差** (residual)

$$\text{残差} = \text{測定値} - \text{資料平均} = M_i - \bar{M}$$

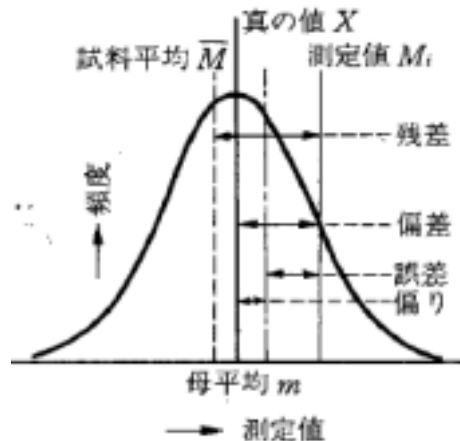


図3. 2 測定値の頻度分布

- 22 -

## 3.2 偶然誤差の性質と正規分布

**確率密度関数:**  $f(x)$

(probability density function)

測定値が $x_1$ と $x_2$ の間に入る確率 $P$ は、

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

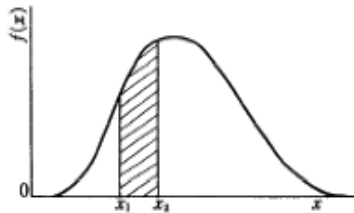


図3.3 確率密度関数

### 誤差の3公理

- ・公理1: 同じ大きさの正または負の誤差は同じ割合(確率)で起こる。
- ・公理2: 絶対値の小さい誤差は大きい誤差より頻繁に起こる。
- ・公理3: 絶対値がある程度以上の大きな誤差は起こらない。

### 正規分布(ガウス分布)

(normal distribution, Gaussian distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ここに、 $m$ : 母平均(母集団の平均)

$\sigma$ : 正規分布の広がり

(偶然誤差の大きさ-母標準偏差)

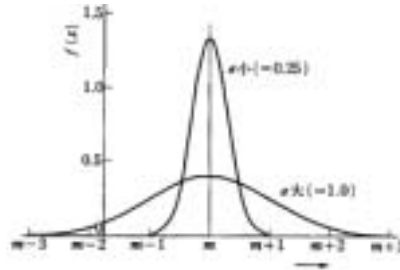


図3.4 正規分布

- 23 -

### 正規分布-誤差関数

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(M_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(M_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

・母平均:  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{M}$

・母標準偏差:  $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m)^2}$

・資料平均:  $\bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$

・資料標準偏差:  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}$

ここに、 $n$  は資料数

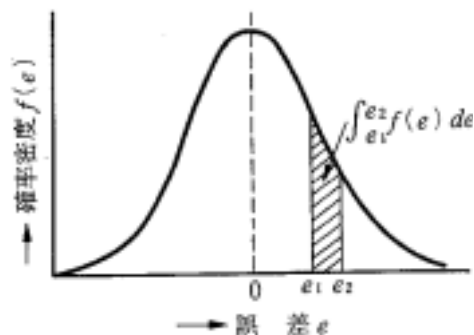


図3.5 誤差関数

- 24 -

## 基準正規分布曲線

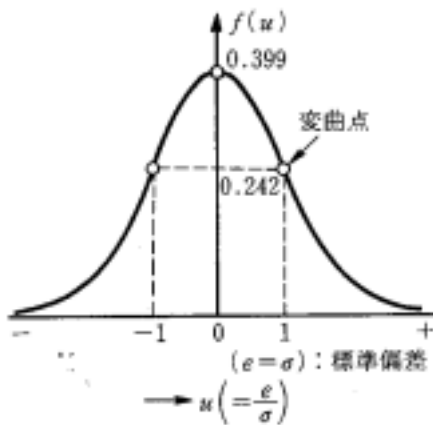


図3.6 基準正規分布関数

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{ここに, } u \text{ は標準単位 } u = \frac{e}{\sigma}$$

表3.1 基準正規分布の値

$u_i$	確率	高さ (確率密度)
	$\int_{-u_i}^{u_i} f(u) du$	$f(u_i)$
0	0	0.399
1.000	0.683	0.242
1.645	0.900	0.103
1.960	0.950	0.058
2.000	0.954	0.054
2.500	0.988	0.018
3.000	0.997	0.004

測定値が  $m \pm 2\sigma$  ( $\bar{M} \pm 2s$ ) の範囲内に入る確率は約95%

## 3.3 測定精度

### 精度 (accuracy)

測定の正しさの程度を表す尺度(誤差の小ささの度合い): 誤差 ↔ 精度  
正確さと精密さを含めたもの, またはいずれか

- ・ **正確さ・正確度** (accuracy): 系統的誤差の小さい程度, 偏りの小ささ(程度)
- ・ **精密さ・精密度** (precision): 偶然誤差の小さい程度, ばらつきの小ささ(程度)

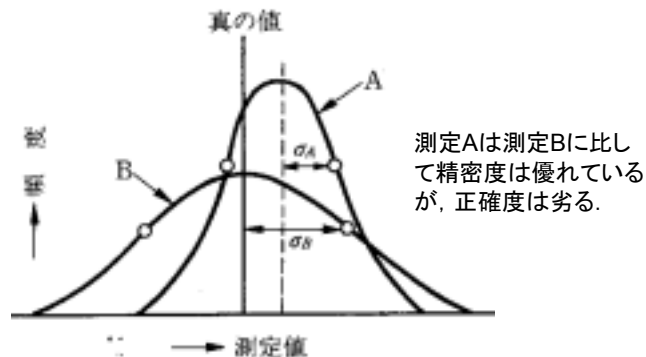
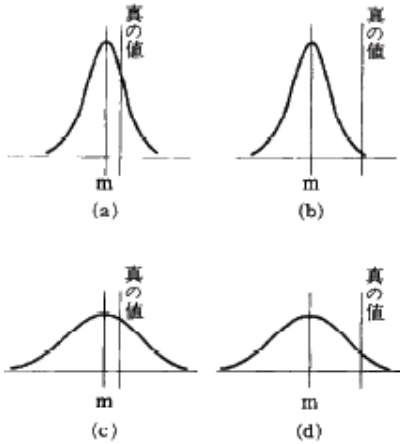


図3.7 精密度と正確度



- (a) 正確度, 精密度もともに良い
- (b) 精密度は良いが, 正確度は悪い
- (c) 正確度は良いが, 精密度は悪い
- (d) 正確度, 精密度もともに悪い

### 計測機器の確度

・**機器誤差**: 計測機器に起因する誤差

系統的誤差を生じると考えたが, 実際には偶然誤差も含む  
(正確度+精密度)



系統的誤差は補正可能 → 機器誤差とは精密度を指すことが多い  
(校正)

## 3.4 測定データの統計的処理

**有効数字** (significant figures)

ある測定結果を示す数字のうち, 位取りを示す0を除く意味のある数字

(例) 長さ測定

- ・ 1.15 m → 有効数字は3桁 (測定精度は  $\pm 0.01$  m)
- ・ 1.150 m → 有効数字は4桁 (測定精度は  $\pm 0.001$  m)

・ **乗除演算**

演算結果の有効桁数は, 演算に用いた測定値の有効桁数の中で最小桁数

(例) 長方形の面積

辺Aの長さ = 1.25 cm (有効数字 3桁)

辺Bの長さ = 5.213 cmの時 (有効数字 4桁)



面積  $S = 1.25 \times 5.213 = 6.52 \text{ cm}^2$  (有効数字 3桁)

・ **加減演算**

演算結果の有効桁数は, 測定値の中で精度に劣るものの最下位桁数

(例) 物体A, B, Cの質量和

物体Aの質量 = 1.23 kg, 物体Bの質量 = 0.456 kg, 物体Cの質量 = 7.8 kg



質量和  $m = 1.23 + 0.456 + 7.8 = 9.4 \text{ kg}$

## 有効数字のしくみ

真値  $T_1, T_2$  を測定したとき,  $M_1, M_2$  が得られた, 測定誤差を  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  とすれば,  
 $T_1 = M_1 \pm \varepsilon_1$  および  $T_2 = M_2 \pm \varepsilon_2$  である.

(1)和差: 総合誤差を考えると, 安全側を採って誤差を加算する.

$$T_1 \pm T_2 \cong (M_1 \pm M_2) \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

(2)積: 誤差は倍加される.

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 &= M_1 \left(1 \pm \frac{\varepsilon_1}{M_1}\right) M_2 \left(1 \pm \frac{\varepsilon_2}{M_2}\right) \\ &\cong M_1 M_2 \pm (M_2 \varepsilon_1 + M_1 \varepsilon_2) \end{aligned}$$

(3)商:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{M_1(1 \pm \varepsilon_1 / M_1)}{M_2(1 \pm \varepsilon_2 / M_2)} \cong \frac{M_1}{M_2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon_1}{M_1}\right) \left(1 \mp \frac{\varepsilon_2}{M_2}\right) \cong \frac{M_1}{M_2} \pm \varepsilon, \\ \text{where } \varepsilon &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\varepsilon_1}{M_1} + \frac{\varepsilon_2}{M_2}\right) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  が総合誤差.  $\varepsilon_1/M_1, \varepsilon_2/M_2$  が相対誤差.

- 29 -

## ・算術平均

ある物理量を  $n$  回測定, 算術平均値  $\bar{M}$  は,

$$\bar{M} = \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

測定した物理量の真の値を  $X$  とすれば, 各測定値の誤差  $e_i$  は,

$$M_i - X = e_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{従って, } \bar{M} = X + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$$

誤差の統計的性質(誤差の3公理)によれば,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum e_i = 0$  であるので,  
 $n$  が十分に大きい場合は, (ただし, 系統的誤差がない場合)

$$\bar{M} = X$$

各測定値と算術平均値との差は残差  $r_i$

$$M_i - \bar{M} = r_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{従って, } \sum M_i - n\bar{M} = \sum r_i \Rightarrow \sum r_i = 0$$

算術平均操作: 残差の和を零(ゼロ)にする操作

- 30 -

### [演習1]有効桁数

球の体積  $V$  [mm] を直径  $D$  [mm] の測定値から求める。

- 直径の測定値:  $D = 20.05$  mm の場合,

- 直径の測定値:  $D = 20.1$  mm の場合,

( $\pi = 3.14159265\dots$ )

### [演習2]試料平均, 試料標準偏差

ある物理量を20回測定したところ, 以下のようなデータを得た。

11.24, 11.15, 11.17, 12.10, 12.05, 12.01, 12.02, 12.82, 11.97, 11.84  
12.54, 12.21, 11.99, 12.11, 12.01, 11.85, 12.00, 11.90, 12.08, 12.02

この結果から, 試料平均値及び試料標準偏差を求めよ。

- 31 -

### 誤差の伝播 (error propagation)

- **直接測定**: 測定量をそれと同種の基準量と比較して測定すること
- **間接測定**: 測定量と一定の関係にあるいくつかの量について測定を行い  
それから測定量を導き出すこと

$n$  個の量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の測定値を用いて, ある量  $q$  を間接測定する場合, 個々の測定量  $x_i$  が  $q$  の測定結果にどのように影響するか → **誤差の伝播**

$$q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  がそれぞれ  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  の誤差をもち, 結果として  $q$  に  $\Delta q$  の誤差が生じたとすれば,

$$\Delta q = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

誤差の最大限度を絶対値で表せば,

$$|\Delta q| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|$$

$q$  に生じる標準偏差  $\sigma_q$  は, 測定量  $x_i$  の標準偏差を  $\sigma_i$  とすれば,

**ガウスの誤差伝播の法則**

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad \text{または,} \quad \sigma_q = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2}$$

(参考) 計測の不確かさ: 日本機械学会誌

- 32 -



### ・間接測定の誤差伝播例

(1)  $q = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  の場合

$$\Delta q = |a_1\Delta x_1| + |a_2\Delta x_2| + \dots + |a_n\Delta x_n|, \quad \sigma_q^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$$

(2)  $q = a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$  の場合

$$\frac{\Delta q}{q} = \left| a_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| a_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + \left| a_n \frac{\Delta x_n}{x_n} \right|$$

$$\left( \frac{\sigma_q}{q} \right)^2 = a_1^2 \left( \frac{\sigma_1}{x_1} \right)^2 + a_2^2 \left( \frac{\sigma_2}{x_2} \right)^2 + \dots + a_n^2 \left( \frac{\sigma_n}{x_n} \right)^2$$

(参考) 対数微分

$$\ln q = \ln a + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \dots + a_n \ln x_n$$

両辺を全微分すると

$$\frac{dq}{q} = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + a_n \frac{dx_n}{x_n}$$

(注意) 誤差率  $\Delta q/q$  あるいは  $\sigma_q/q$  を小さくするには、大きな係数  $a_i$  あるいは大きなべき指数  $a_i$  を持つ測定量  $q_i$  ほど精度良く測定する必要有り。

**誤差等分の原理:** 誤差が最大となる測定量の精度に、他の測定量の精度を合わせる

- 33 -

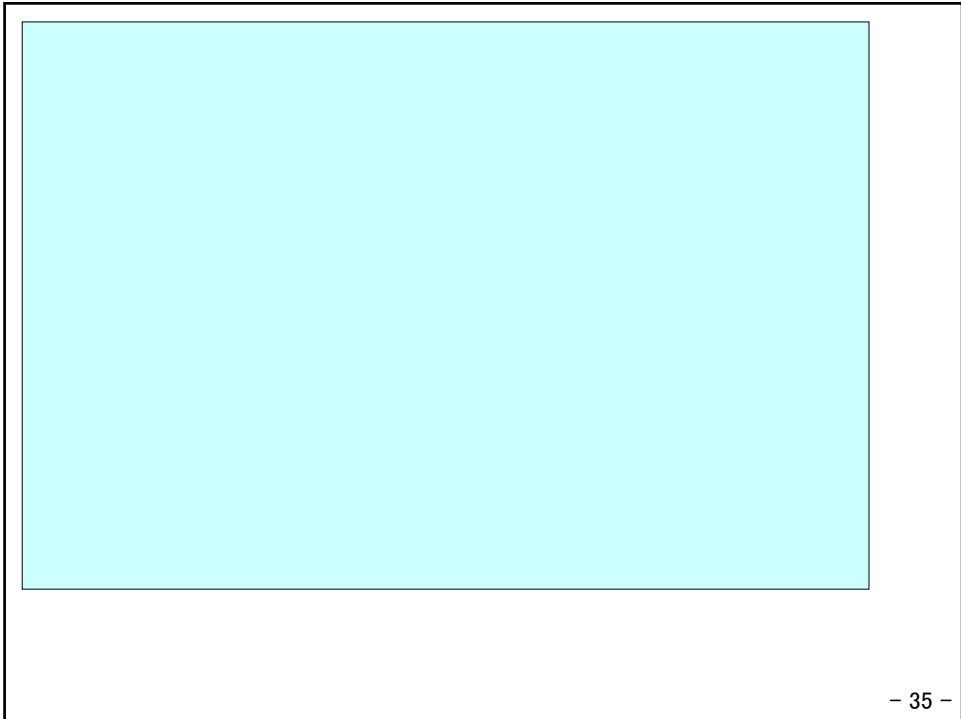
**[演習3]** 測定量  $Q$  の標準偏差を  $\sigma$  とする。  $Q$  を  $n$  回測定し、測定量  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  から平均値  $\bar{Q}$  を求めた時の、平均値  $\bar{Q}$  の標準偏差  $\sigma_m$  は？



**[演習4]** 高さ  $h$  の測定値は  $6.42 \pm 0.57$  mm, 直径  $d$  の測定値は  $14.38 \pm 0.43$  mm であった。直円筒の体積  $V$  を求めよ。



- 34 -



**[演習5]** 平均移動速 $v$ と距離 $L$ を測定したところ、以下となった。 $L$ を通過する時間を求めよ。  
 $v = 54.2 \pm 0.4$  [m/s],  $L = 1.05 \pm 0.03$  [km]



### 3.5 最小二乗法 (least square method)

#### 最小二乗法の定義

ある量に対して  $n$  個の測定値  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を得たとき、標準偏差を  $\sigma$ 、真の値を  $X$  とすれば、測定値  $M_i$  を得る確率は、

$$f(M_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{(M_i - X)^2}{2\sigma^2}$$

従って、 $n$  回の独立した測定で、 $n$  個の測定値  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を同時に得る確率  $P$  は、以下のようになる。

$$P = f(M_1)f(M_2)\dots f(M_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp \frac{\sum(M_i - X)^2}{2\sigma^2}$$

この項が最小となれば  $P$  は最大

確率  $P$  を真の値  $X$  の関数と考え、確率  $P$  が最大となる  $X$  の値を  $X_0$  とすれば、 $X_0$  は真の値  $X$  の最確値となる。すなわち、 $X_0$  が満足すべき条件は、

$$\sum(M_i - X)^2 = \min. \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dX} \sum(M_i - X)^2 = 0 \quad (\text{最小二乗法})$$

以上より、最確値  $X_0$  は、測定値  $M_i$  の算術平均値  $\bar{M}$  と一致する。

$$X_0 = \frac{1}{n} \sum M_i = \bar{M}$$

**最小二乗法:** 「誤差(残差)の二乗和を最小とする」条件を用いて最確値を決定する方法。

- 37 -

#### 正規方程式(基準方程式) (normalized equation)

最小二乗法によって、 $m$  個の未知量  $Z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) を  $n$  個の測定値  $M_i$  から決定する。

$$M_i = f_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \quad \text{ただし, } i = 1, 2, \dots, n \text{ で, } n > m$$

関数  $f_i$  を未知量  $Z_k$  の一次式と近似(線形近似)(二次式は解析が複雑)。

$$M_i = a_{1i}Z_1 + a_{2i}Z_2 + \dots + a_{mi}Z_m$$

**観測式, 測定方程式** (observation equation) は、

$$\begin{cases} M_1 = a_{11}Z_1 + a_{21}Z_2 + \dots + a_{m1}Z_m \\ M_2 = a_{12}Z_1 + a_{22}Z_2 + \dots + a_{m2}Z_m \\ \dots \\ M_n = a_{1n}Z_1 + a_{2n}Z_2 + \dots + a_{mn}Z_m \end{cases}$$

測定値  $M_i$  の誤差(残差)を  $e_i$  とすれば、

$$\begin{cases} e_1 = (a_{11}Z_1 + a_{21}Z_2 + \dots + a_{m1}Z_m) - M_1 \\ e_2 = (a_{12}Z_1 + a_{22}Z_2 + \dots + a_{m2}Z_m) - M_2 \\ \dots \\ e_n = (a_{1n}Z_1 + a_{2n}Z_2 + \dots + a_{mn}Z_m) - M_n \end{cases}$$

最小二乗法では、未知量  $Z_k$  の最確値は誤差の二乗和が最小となるように求める。

- 38 -

従って,

$$\frac{\partial}{\partial Z_k} \sum_{i=1}^n e_i^2 = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

上式より,

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} e_i = \sum_{i=1}^n a_{ki} \{ (a_{1i} Z_1 + a_{2i} Z_2 + \dots + a_{ki} Z_k + \dots + a_{mi} Z_m) - M_i \} = 0$$

以上より, 未知量  $Z_k$  の最確値を決定するための正規方程式 (normalized equation) が求められる.

$$\left( \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{1i} \right) Z_1 + \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{2i} \right) Z_2 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{mi} \right) Z_m = \sum_{i=1}^n a_{ki} M_i$$

(ここに,  $k = 1, 2, \dots, m$ )

※ 観測式は測定問題に応じて, 測定者が設定する(観測式は唯一ではない).

## 正規方程式の応用#1 線形重回帰分析

説明変数				目的変数	変数定義
$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_m$	$y$	
$x_{11}$	$x_{21}$	$\dots$	$x_{m1}$	$y_1$	与えられたデータ群
$x_{12}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{m2}$	$y_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_{1n}$	$x_{2n}$	$\dots$	$x_{mn}$	$y_n$	

回帰モデル  $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_m X_m$

誤差最小二乗原理を適用して,

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_{1i} + \dots + b_m x_{mi}))^2$$

正規方程式  $\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial b_m} = 0$  を連立させて,

$b_0, b_1, \dots, b_m$  を求める.

ここで、以下のベクトルとマトリクスを導入する.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

前頁の $n$ 元の特性方程式は以下のように表される.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\bar{b} = \mathbf{X}'\bar{Y} \quad \cdots(1)$$

これを解くと,

$$\bar{b} = [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\bar{Y}$$

**[演習6]**  $n$ 元の正規方程式を陽に書き下し, (1)式を証明せよ.

## 実験式

2つの物理量 $(x, y)$ の間には、次の関数関係があるとする.

$$y = f(x)$$

この関係を $n$ 組の $(x, y)$ の測定値 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ から推定する方法を考える. 今、関数 $f(x)$ を次の二次式で近似する.

$$y = a + bx + cx^2$$

ここに、 $a = Z_1, b = Z_2, c = Z_3$ とおけば、

$$y = Z_1 + Z_2x + Z_3x^2$$

$n$ 組の $(x, y)$ の測定値より、以下の観測式が得られる.

$$\begin{cases} Z_1 + x_1Z_2 + x_1^2Z_3 = y_1 \\ Z_1 + x_2Z_2 + x_2^2Z_3 = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ Z_1 + x_nZ_2 + x_n^2Z_3 = y_n \end{cases}$$

ここに、

$$\begin{cases} a_{11} = 1 & a_{21} = x_1 & a_{31} = x_1^2 & M_1 = y_1 \\ a_{12} = 1 & a_{22} = x_2 & a_{32} = x_2^2 & M_2 = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n} = 1 & a_{2n} = x_n & a_{3n} = x_n^2 & M_n = y_n \end{cases}$$

未知量  $Z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の最確値を決定するための正規方程式は、

$$\left( \sum_{i=1}^n a_{1i} a_{1i} \right) Z_1 + \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} a_{2i} \right) Z_2 + \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} a_{3i} \right) Z_3 = \sum_{i=1}^n a_{1i} M_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^n a_{2i} a_{1i} \right) Z_1 + \left( \sum_{i=1}^n a_{2i} a_{2i} \right) Z_2 + \left( \sum_{i=1}^n a_{2i} a_{3i} \right) Z_3 = \sum_{i=1}^n a_{2i} M_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^n a_{3i} a_{1i} \right) Z_1 + \left( \sum_{i=1}^n a_{3i} a_{2i} \right) Z_2 + \left( \sum_{i=1}^n a_{3i} a_{3i} \right) Z_3 = \sum_{i=1}^n a_{3i} M_i$$

係数を元に戻すと、近似式の定数  $a, b, c$  を求めるための三式が得られる。

$$na + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) c = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b + \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) c = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) b + \left( \sum_{i=1}^n x_i^4 \right) c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

なお、 $y = a + bx$  と近似した場合は、上の三式中の最初の二式により定数  $a, b$  を求めればよい(ただし、 $c = 0$ )。

- 43 -

### 実験式の関数形(例)

①  $Y = AX^B$  の場合

$$\ln Y = \ln A + B \ln X$$

$y = \ln Y$ ,  $x = \ln X$ ,  $a = \ln A$ ,  $b = B$  とおけば、 $y = a + bx$  と近似したことと同じ。

②  $Y = \frac{A}{X^2} + \frac{B}{X} + C$  の場合

$$YX^2 = A + BX + CX^2$$

$y = YX^2$ ,  $x = X$ ,  $a = A$ ,  $b = B$ ,  $c = C$  とおけば、 $y = a + bx + cx^2$  と近似したことと同じ。

③  $Y = \frac{1}{A + BX + CX^2}$  の場合

$$\frac{1}{Y} = A + BX + CX^2$$

$y = 1/Y$ ,  $x = X$ ,  $a = A$ ,  $b = B$ ,  $c = C$  とおけば、 $y = a + bx + cx^2$  と近似したことと同じ。

※ 実験式の関数形は現象の物理的意味を吟味して定める(試行錯誤も重要).  
 実験式の関数形の吟味→方対数グラフ(対数関係), 両対数グラフ(power-law; スケールフリー)の活用.

- 44 -

### 3.6 計測の不確かさ解析 (参考)計測の不確かさ:日本機械学会誌

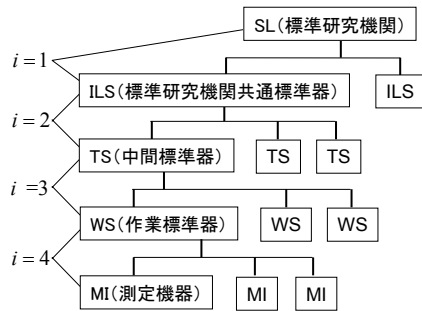
#### 計測誤差の要因 (一般に系統的誤差+偶然誤差)

##### (1)較正(校正)に伴う誤差(例)

較正(校正):許容できる程度まで不確かさを小さくすること

要因(i)	誤差要因	正確度	精密度	自由度
1	SL-ILS	$B_{11}$	$S_{11}$	$\nu_{11}$
2	ILS-TS	$B_{21}$	$S_{21}$	$\nu_{21}$
3	TS-WS	$B_{31}$	$S_{31}$	$\nu_{31}$
4	WS-MI	$B_{41}$	$S_{41}$	$\nu_{41}$

※自由度とは資料の数. 資料からひとつの統計量が計算されるたびに, 付随する自由度は減少



測定の校正階層(トレーサビリティ)

##### (2)データ収集に伴う誤差(例)

要因(i)	誤差要因	正確度	精密度	自由度
1	印可電圧	$B_{12}$	$S_{12}$	$\nu_{12}$
2	信号処理	$B_{22}$	$S_{22}$	$\nu_{22}$
3	記録計	$B_{32}$	$S_{32}$	$\nu_{32}$
4	センサ誤差	$B_{42}$	$S_{42}$	$\nu_{43}$
5	環境影響	$B_{52}$	$S_{52}$	$\nu_{53}$

- 45 -

##### (3)データ処理に伴う誤差(例)

要因(i)	誤差要因	正確度	精密度	自由度
1	校正曲線当てはめ	$B_{13}$	$S_{13}$	$\nu_{13}$
2	数値計算精度	$B_{23}$	$S_{23}$	$\nu_{23}$

※ データ処理の過程で発生する典型的な誤差は, 校正曲線の当てはめと数値計算の誤差であるが, これらの誤差は無視できるほど小さい場合が多い.

#### 誤差の総括と自由度

##### (1)要素精密度の総括

$$\text{計測の総括精密度: } S = \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} S_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

$j$  は誤差要因の区分  $\rightarrow j=1$ : 校正,  $j=2$ : データ収集,  $j=3$ : データ処理  
 $i$  は各区分の中の各誤差要因

$$\cdot \text{較(校)正過程の精密度: } S_1 = \left[ \sum_{i=1}^4 S_{i1}^2 \right]^{1/2} = [S_{11}^2 + S_{21}^2 + S_{31}^2 + S_{41}^2]^{1/2}$$

$$\cdot \text{データ収集過程の精密度: } S_2 = \left[ \sum_{i=1}^5 S_{i2}^2 \right]^{1/2}$$

- 46 -

・データ処理過程の精密度:  $S_3 = \left[ \sum_{i=1}^2 S_{i3}^2 \right]^{1/2}$

・計測の総括精密度:  $S = [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2]^{1/2}$

## (2) 要素正確度の総括

計測の総括正確度:  $B = \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} B_{ij}^2 \right]^{1/2} = [B_1^2 + B_2^2 + B_3^2]^{1/2}$

ここに,  $B_j = \left[ \sum_{i=1}^{K_j} B_{ij}^2 \right]^{1/2}$  ( $j=1$ : 校正,  $j=2$ : データ収集,  $j=3$ : データ処理)

各要素正確度が非対称な場合,

$$B^+ = \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} (B_{ij}^+)^2 \right]^{1/2}, \quad B^- = \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} (B_{ij}^-)^2 \right]^{1/2}$$

## (3) 小数資料の自由度の総括 (Welch-Satterthwaite の式)

$$v = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} S_{ij}^2 \right]^2}{\left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{K_j} S_{ij}^4 / v_{ij} \right]} \quad \text{ここに, } v_{ij} = N_{ij} - 1$$

$N_{ij}$  は  $S_{ij}$  の計算に用いられた資料の数

- 47 -

## 計測の不確かさ

### (1) 計測の不確かさ解析の条件

- ・すべての誤差要因が認知され, 各の正確度及び精密度として定量化されていること
- ・要素誤差が統合され, 総括正確度, 総括精密度が求められていること
- ・計測の精密度に対する自由度が得られていること

### (2) 包括度と不確かさ区間

厳密な統計的信頼度 (confidence level) の代わりに, 95% 信頼度あるいは 99% 信頼度と類似の包括度 (coverage) に基づき不確かさ区間を用いて, **計測の不確かさ (Measurement Uncertainty)  $U$**  を評価する.

$$U_{ADD} = B + t S_{\bar{X}} \quad (\text{約99\%包括度})$$

$$U_{RSS} = [B^2 + (t S_{\bar{X}})^2]^{1/2} \quad (\text{約95\%包括度})$$

ここに,  $B$  は正確度,  $S_{\bar{X}}$  は平均値  $\bar{X}$  の精密度,

$t$  はスチューデント  $t$  分布に関する値

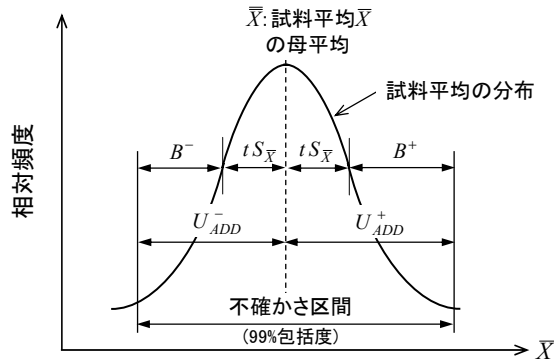
$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad : \text{複数の測定値から求めた平均値 } \bar{X} \text{ の精密度}$$

### ※非対称な場合

$B^+$  に対して  $U^+$  を求め,  $B^-$  に対して  $U^-$  を求める.

- 48 -





95%信頼度に対する対称スチューデント  $t$  値

自由度	t	自由度	t	自由度	t
1	12.706	11	2.201	21	2.080
2	4.303	12	2.179	22	2.074
3	3.182	13	2.160	23	2.069
4	2.776	14	2.145	24	2.064
5	2.571	15	2.131	25	2.060
6	2.447	16	2.120	26	2.056
7	2.365	17	2.110	27	2.052
8	2.306	18	2.101	28	2.048
9	2.262	19	2.093	29	2.045
10	2.228	20	2.086	30以上	2.0

## 平均値の信頼区間

有限回異数の測定から試料平均  $\bar{x}$  を求めても、母平均  $m$  とは一致しない。よって、 $n$  回の測定から得られる平均値  $\bar{x}$  も  $m$  と中心にあるばらつきをもって分布する。その場合の分布の標準偏差は  $\sigma/\sqrt{n}$  である。

$\bar{x}$  が求まったら、 $\bar{x}$  が  $m$  よりどれだけ離れうるかを知れば、母平均  $m$  の存在しうる範囲を知ることができる。このような場合、「母平均  $m$  は  $\bar{x} \pm k$  の範囲内に  $P(90\%, 95\%, 99\%$  等) の確率で存在しうる」との表現をする。ここで  $\bar{x} \pm k$  を信頼区間と云う。

1) 過去の測定によって  $\sigma$  が既知の場合

$$k_1 = \frac{c_1 \sigma}{\sqrt{n}}$$

$c_1$  は信頼区間により右表。

P	0.90	0.95	0.99
$c_1$	1.645	1.960	2.576

2)  $\sigma$  が未知の場合

$$k_2 = \frac{c_2 s_n}{\sqrt{n}}$$

$s_n$  は試料標準偏差。  $c_2$  は前頁に示した対称スチューデント値で下表。

n	$c_2$	$c_3$	n	$c_2$	$c_3$
2	12.71	0.00	12	2.20	4.57
3	4.30	0.10	13	2.18	5.23
4	3.18	0.35	14	2.16	5.89
5	2.78	0.71	15	2.15	6.57
6	2.57	1.15	20	2.09	10.12
7	2.45	1.64	30	2.04	17.70
8	2.37	2.17	40	2.02	25.70
9	2.31	2.73	50	2.01	34.00
10	2.26	3.33	100	1.98	77.00
11	2.23	3.94			

## 標準偏差の信頼区間

$$k_3 = \frac{(n-1)s_n^2}{c_3}$$

**[例題1]** ある長さ測定で $\sigma=1.2\mu\text{m}$ が知られている。5回の測定値より、その算術平均値 $24.985\text{mm}$ が得られた。95%信頼区間を求めよ。

$$k_1 = \frac{1.960 \times 1.2}{\sqrt{5}} = 1.05\mu\text{m} \cong 1\mu\text{m}$$

**[例題2]** 10回の長さ測定が $50.0031\text{mm}$ 、(以下小数第3, 4位のみ表記)26, 24, 27, 26, 30, 29, 31, 30, 28であったと云う。試料平均 $\bar{x}$ 、試料分散 $s_{10}^2$ 、試料標準偏差 $s_{10}$ を求め、測定値の95%信頼区間および分散に対する95%信頼区間を求めよ。

$$\bar{x} = 50.000 + \frac{0.0282}{10} = 50.0028_2 \text{ mm}$$

$$s_{10}^2 = \frac{1}{10-1} \times 0.52 = 0.0578 [\mu\text{m}]^2$$

$$s_{10} = \sqrt{0.0578} = 0.240 [\mu\text{m}]$$

$$k_2 = \frac{c_2 \times s_{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2.26 \times 0.240}{\sqrt{10}} = 0.17\mu\text{m}$$

$$k_3 = \frac{(10-1) \times s_{10}^2}{c_3} = \frac{9 \times 0.0578}{3.33} = 0.156 [\mu\text{m}]^2$$

- 51 -

## 結果の不確かさ(間接測定の場合)

### (1) 測定誤差の結果への伝播

$n$ 個の量( $P_1, P_2, \dots, P_n$ )の測定値を用いて、ある量 $r$ を間接測定する場合、個々の測定量 $P_i$ が $r$ の測定結果にどのように影響するか

$$r = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$r$ に生じる標準偏差 $\sigma_r$ は、測定量 $P_i$ の標準偏差を $\sigma_i$ とすれば、

**ガウスの誤差伝播の法則**  $\sigma_r^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \right)^2 \sigma_i^2$  または、 $\sigma_r = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \right)^2 \sigma_i^2}$

### (2) 感度 (sensitivity)

感度: 測定される各パラメータに単位量の誤差が生じた時、その誤差により最終結果に生ずる誤差

感度係数

・絶対感度係数:  $\theta_i = \frac{\partial r}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial P_i}$

・相対感度係数:  $\theta_i^* = \frac{\partial r/r}{\partial P_i/P_i} = \frac{P_i}{r} \frac{\partial r}{\partial P_i} = \frac{P_i}{r} \frac{\partial f}{\partial P_i}$

数値的方法

$$\theta_i = \frac{\Delta r}{\Delta P_i}$$

$$\theta_i^* = \frac{\Delta r/r}{\Delta P_i/P_i}$$

- 52 -

### (3) 結果の不確かさ

・結果の精密度 (precision index)

$$\text{絶対精密度 } S_r = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \right)^2 S_{P_i}^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^n (\theta_i S_{P_i})^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{相対精密度 } \frac{S_r}{r} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial r/r}{\partial P_i/P_i} \right)^2 \left( \frac{S_{P_i}}{P_i} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \theta_i^* \frac{S_{P_i}}{P_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

・結果の正確度

$$\text{絶対正確度 } B_r = \left[ \sum_{i=1}^n (\theta_i B_{P_i})^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{相対正確度 } \frac{B_r}{r} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \theta_i^* \frac{B_{P_i}}{P_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

・結果の不確かさ

$$U_{r_{ADD}} = B_r + t S_r \quad (\text{約99\%包括度})$$

$$U_{r_{RSS}} = \left[ B_r^2 + (t S_r)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{約95\%包括度})$$

- 53 -

### (4) 異常値の取り扱い: 修正トンプソン- $\tau$ 法

ある量  $P_i$  に対して,  $N$  個の測定量  $P_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) がある. この測定試料の平均値を  $\bar{P}_i$ , 精密度を  $S_{P_i}$  とする.

$k$  番目の測定量と平均値との差の絶対値は,

$$\delta_k = |P_{ik} - \bar{P}_i|$$

$$\begin{cases} \delta_k \geq \tau S_{P_i} & \Rightarrow P_{ik} \text{ は異常値} \\ \delta_k < \tau S_{P_i} & \Rightarrow P_{ik} \text{ は異常値ではない} \end{cases}$$

この手法は使い手がある;  
測定から求めた精密度の  
def→#48

修正トンプソン- $\tau$ 法の  $\tau$  値 (5%有意水準)

N	$\tau$	N	$\tau$	N	$\tau$	N	$\tau$
		11	1.815	21	1.889	31	1.913
		12	1.829	22	1.893	32	1.914
3	1.150	13	1.840	23	1.896	33	1.916
4	1.393	14	1.849	24	1.899	34	1.917
5	1.572	15	1.858	25	1.902	35	1.919
6	1.656	16	1.865	26	1.904	36	1.920
7	1.711	17	1.871	27	1.906	37	1.921
8	1.749	18	1.876	28	1.908	38	1.922
9	1.777	19	1.881	29	1.910	39	1.923
10	1.798	20	1.885	30	1.911	40	1.924

(N:試料の大きさ)

- 54 -

**[例題]** 円柱の体積  $V$  を高さ  $h$  と直径  $d$  の測定値から求める場合の不確かさ解析.

(1) 誤差伝播の関係式

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h \Rightarrow \left( \frac{\sigma_V}{V} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_\pi}{\pi} \right)^2 + 2^2 \left( \frac{\sigma_d}{d} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_h}{h} \right)^2, \quad \left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{\Delta \pi}{\pi} \right| + 2 \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right|$$

(2)  $h$  と  $d$  を, 多数回測定した結果, 平均値が  $h = 10.05 \text{ cm}$ ,  $d = 2.03 \text{ cm}$  で, それぞれの標準偏差は  $\sigma_h = \pm 0.07 \text{ cm}$ ,  $\sigma_d = \pm 0.05 \text{ cm}$  であった. このことより,  $h$  と  $d$  の絶対精密度はそれぞれ  $S_h = \pm 0.07 \text{ cm}$  及び  $S_d = \pm 0.05 \text{ cm}$  と判断した. また,  $h$  と  $d$  の絶対正確度はそれぞれ  $B_h = \pm 0.05 \text{ cm}$  及び  $B_d = \pm 0.005 \text{ cm}$  であった. 円柱体積の不確かさを求めよ.

**[演習5]** 自らが行っている研究, 学部などで実施した実験等を参考にして, 何らかの物理量の測定を想定して, その不確かさ解析を試みよ.

## 4. 計測系の構成

### 4.1 計測系の構成

**熱電対による温度計測(図4.1)**

- ・測定対象の温度  $\theta_i$
- ・熱電対による熱起電力  $e$
- ・ミリボルトメータで  $e$  を測定
- ・ミリボルトメータで  $e$  を温度の指示値  $\theta_o$  に変換して表示

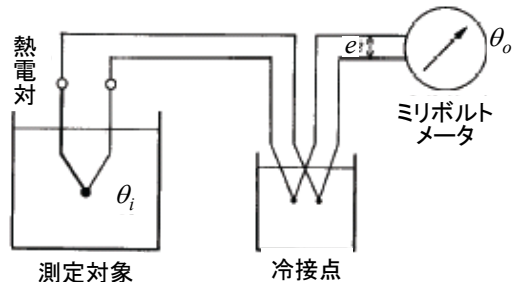


図4.1 温度測定系の例

熱電3効果;

**Seebeck effect, Peltier effect, Thomson effect**

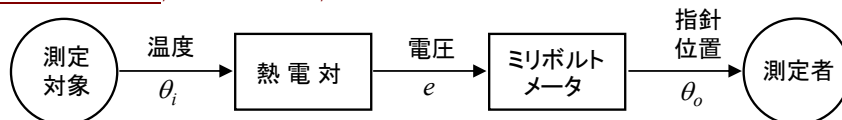


図4.2 温度測定系のブロック線図

**信号** (signal) : 情報を伝達するのに用いられる物理量

**変換** (signal conversion) : 信号を対応する他の信号に変えること

**変換器** (signal convertor, transducer) :

信号の変換のために用いられる要素・器具(熱電対, 圧力計, ミリボルトメータなど)

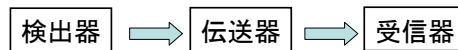
**検出器** (detecting element) :

熱電対のように計測系の初段に用いられ, 測定量を検出する変換器

**指示計** (indicator) :

ミリボルトメータのように, 計測系の最終段に用いられ, 測定量を指示する計器

**記録計** (recorder) : 指示計の代わりに測定量を記録する



- 57 -

## 4.2 伝送

**伝送器** (transmitter) :

検出器と受信器との間をつなぎ, 検出器より受けた信号を所定の形, 大きさにして受信機に渡す

拡大(増幅), 変調, 復調, 演算, 遠隔伝送など

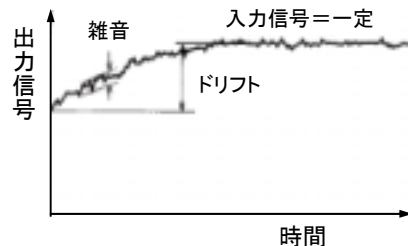


図4.3 ドリフトと雑音

(a) **増幅器** (amplifier) :

検出器から得られた微弱な信号を拡大, 増幅する

・**ドリフトと雑音** (図4.3)

増幅器への入力信号が一定であっても, 周囲の温度変化や, 電源電圧の変動, 素子の温度変化などによって, 出力信号が時間に対して変動する → **ドリフト** (drift), 入力信号以外の無効の信号を **雑音** (noise)

・信号対雑音比: S/N比 (S: 信号, N: 雑音)

・演算増幅器 (operational amplifier: OPアンプ)

$$V_o = G(V_+ - V_-)$$

ここに,  $G$  は増幅度

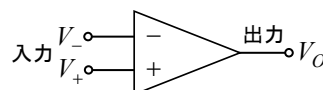


図4.4 OPアンプ

- 58 -

**(b) 遠隔伝送・信号伝送** (telemetry/signal transmission):

測定対象と測定する場所が離れている場合, 検出信号を受信器まで長距離伝送する. →空気圧, 電気量(電流や電圧)による

- ・**直送式**: 検出器で変換された信号をそのまま受信器に伝送する方式
- ・**平衡法**: 検出器側で測定量を電圧や電流などに変換して, それらの信号を受信器側の電圧や電流と平行させる方式
- ・**変調方式**: 高周波の搬送波(carrier wave)に信号をのせて伝送する方式  
→伝送中の信号の減衰や, 雑音を小さくできる

**変調** (modulation): 搬送波を入力信号によって変化させる

**復調・検波** (demodulation/detection):

受信器側で, 伝送されてきた変調波から入力信号を復元

- 振幅変調 (amplitude modulation, AM)
- 周波数変調 (frequency modulation, FM)
- パルス振幅変調 (pulse amplitude modulation, PAM)
- パルス位置変調 (pulse position modulation, PPM)
- パルス幅変調 (pulse width modulation, PWM)
- パルス符号変調 (pulse coded modulation, PCM)

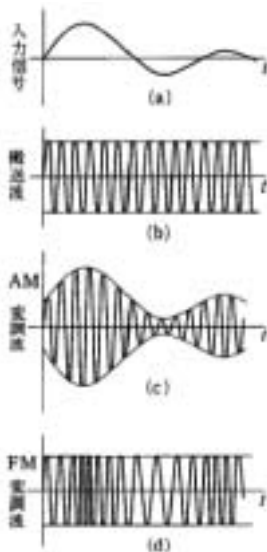


図4.5 AM変調とFM変調

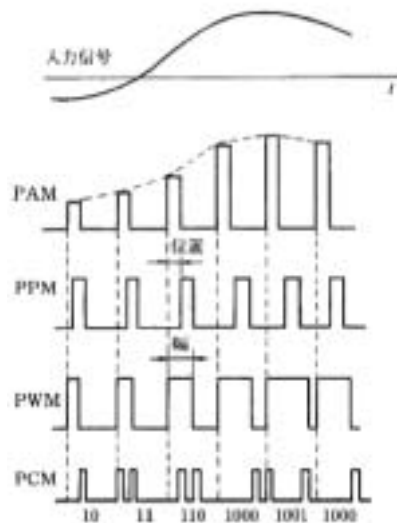


図4.6 パルス変調

### 4.3 AD変換 (analog-to-digital conversion):

デジタル計測は、アナログ計測に比して、高精度、高速応答のほか、記憶、伝送、信号処理などで優れている。

・AD変換器 (AD converter):

測定や制御の対象となる物理量は、本来、アナログ量(連続した量)であるが、このアナログ量をデジタル量(離散的な量)に変換する装置

→量子化(quantization):アナログ量をいくつかの区間に区切り、各区間に同一のデジタル量を割り当てる(量子化誤差が生じる)

→サンプリング周期:一定時間毎にアナログ量をサンプリングを行ってからデジタル量に変換し、次のサンプリングまで同一の値を保持する。この時間間隔をサンプリング周期

・DA変換器 (DA converter): デジタル量をアナログ量に変換する装置

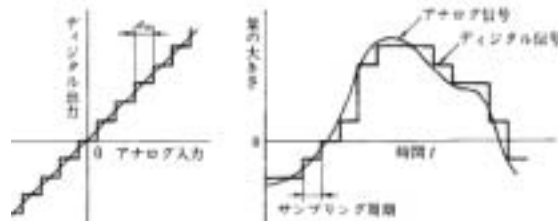


図4.7 量子化



図4.8 計測システムにおける信号の流れ

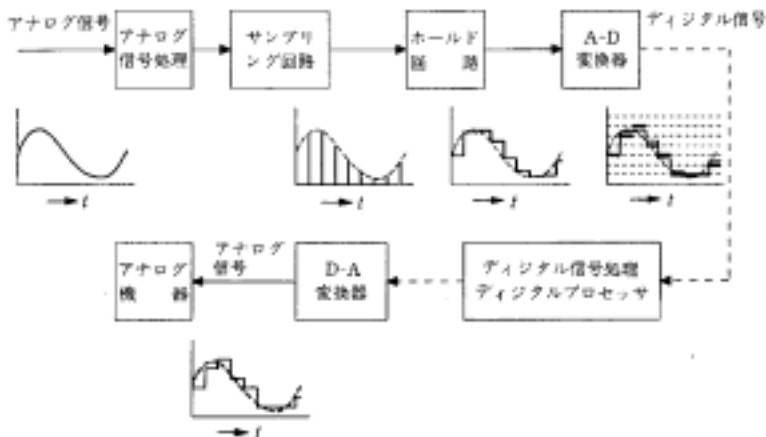
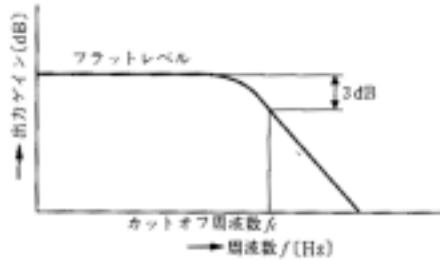


図4.9 デジタル信号処理の流れ

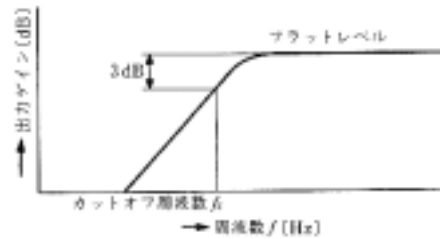
**ローパスフィルタ**(LPF: low pass filter, 低域フィルタ)

カットオフ周波数 $f_c$ 以下の成分を透過させる。 $f_c$ は出力がフラットレベルより3dB低下した周波数と定義。フィルタ特性の良さは減衰傾度で表し、下図で傾斜が切り立っていればいるほど性能がよい。高周波ノイズを除去するのに使う。



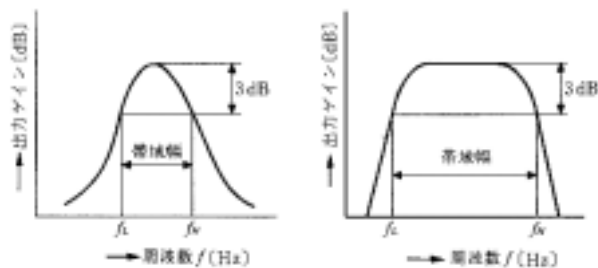
**ハイパスフィルタ**(HPF: high pass filter, 高域フィルタ)

カットオフ周波数 $f_c$ 以上の成分を透過させる。



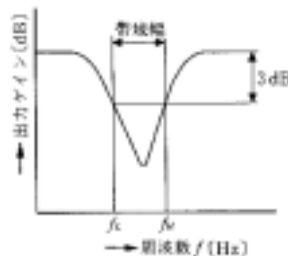
**バンドパスフィルタ**(BPF: band pass filter, 帯域フィルタ)

特定の周波数の信号のみを透過させる。 $f_c$ 同様 $f_H$ と $f_L$ を定義。



**バンドエリミネートフィルタ**(BEF: band eliminate filter, 帯域消去フィルタ)

特定の周波数の信号のみを除去する。



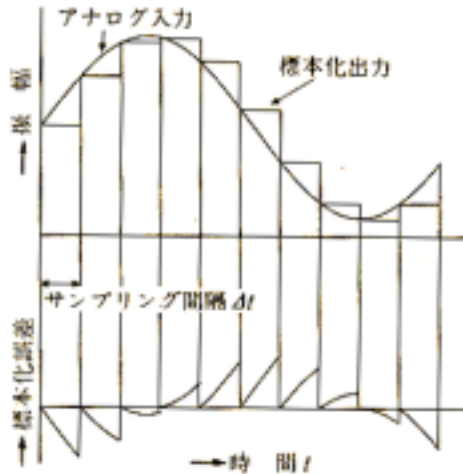


## 測定サンプリングとサンプリング定理

$f_s = 1/\Delta t$ : サンプリング周波数 ( $\Delta t$ : サンプリング周期)

Nyquistの折り返し周波数:  $f_n = 1/(2\Delta t) = f_s/2$

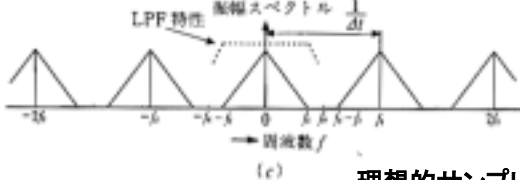
「信号に含まれる最も高い周波数を  $f_c$  [Hz] とすれば,  $\Delta t \leq 1/(2f_c)$  [s] 以下のサンプリング間隔でサンプリングされた値には元の信号の情報は全て含まれている」(サンプリング定理)



- 65 -

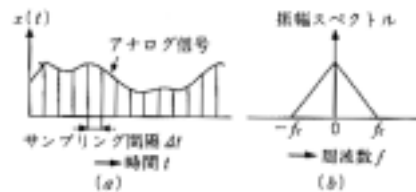
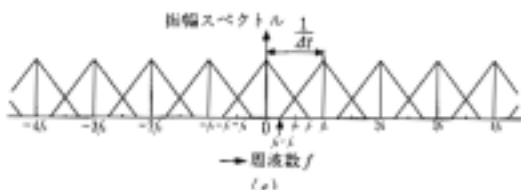
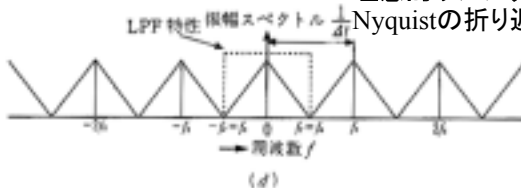
## 測定サンプリングとサンプリング定理

**オーバーサンプリング ( $\Delta t$ 小)**  
元の信号を完全復元出来る



### 理想的サンプリング

Nyquistの折り返し周波数 = LPFのカットオフ周波数



LPF特性の良好な((b)図の勾配が大きい,  $f_c$ の小さい)フィルタを使うならば,  $1/\Delta t$ を小さくできる, すなわち大きなサンプリング間隔で欠落のない情報が得られる.

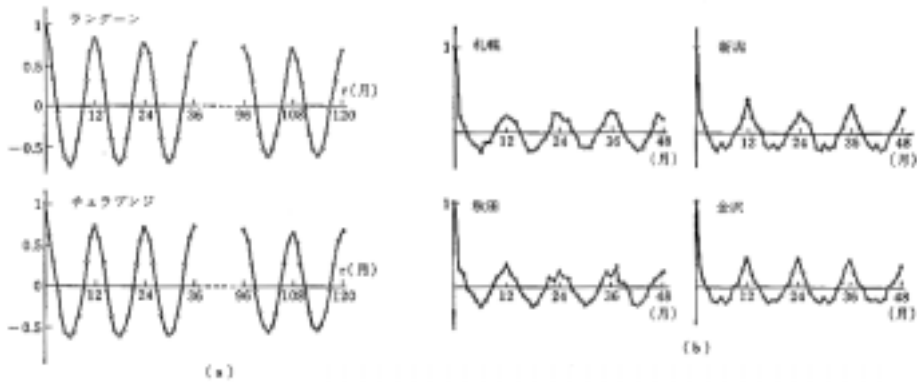
**アンダーサンプリング ( $\Delta t$ 大)**  
スペクトルが重なって元の信号波形を復元出来ない(aliasing, エリアシング)

- 66 -

## 時系列データとスペクトル

自己相関関数;  $C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$

相互相関関数;  $C_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)}$

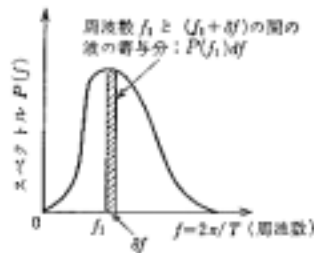
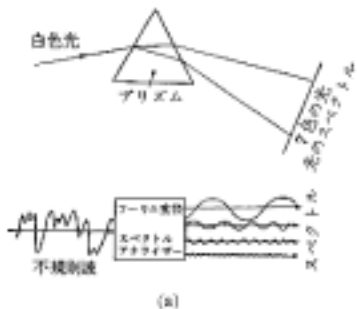


月平均雨量の自己相関(菅原正巳, 1965)

自己相関関数, 相互相関関数の夫々のフーリエ変換がスペクトル, クロススペクトル.

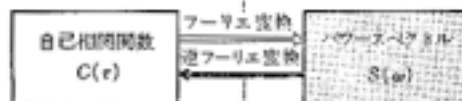
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$$

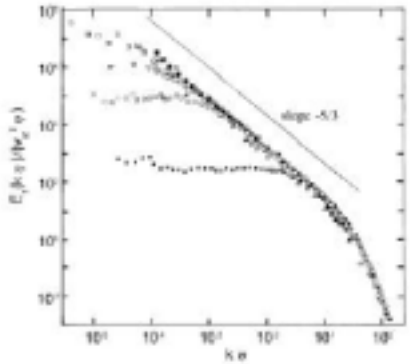
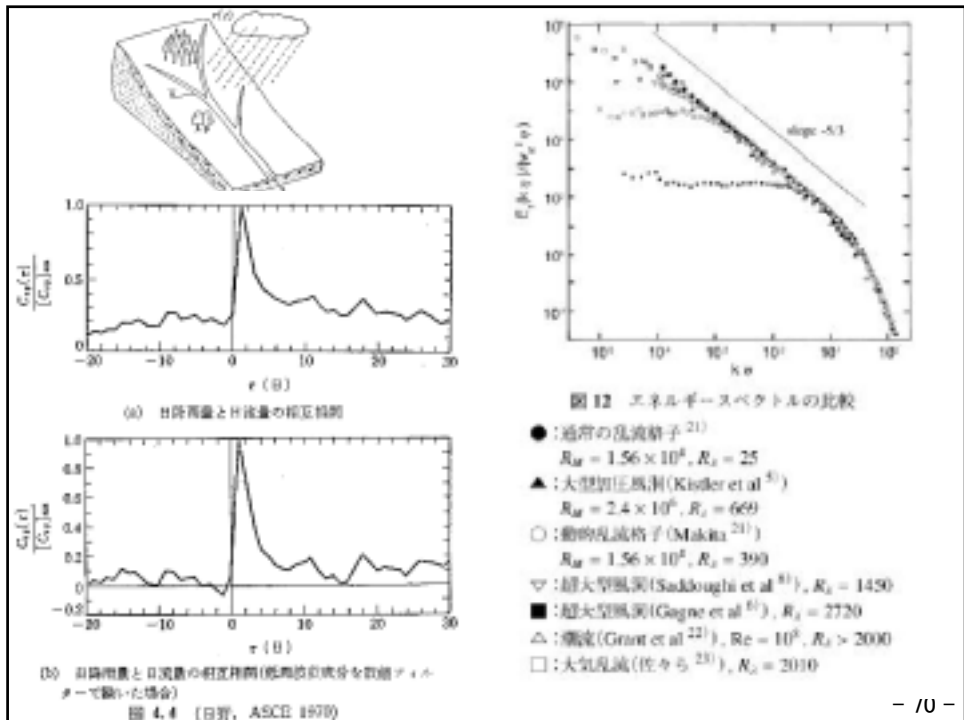


時間領域 (Time Domain)      周波数領域 (Frequency Domain)

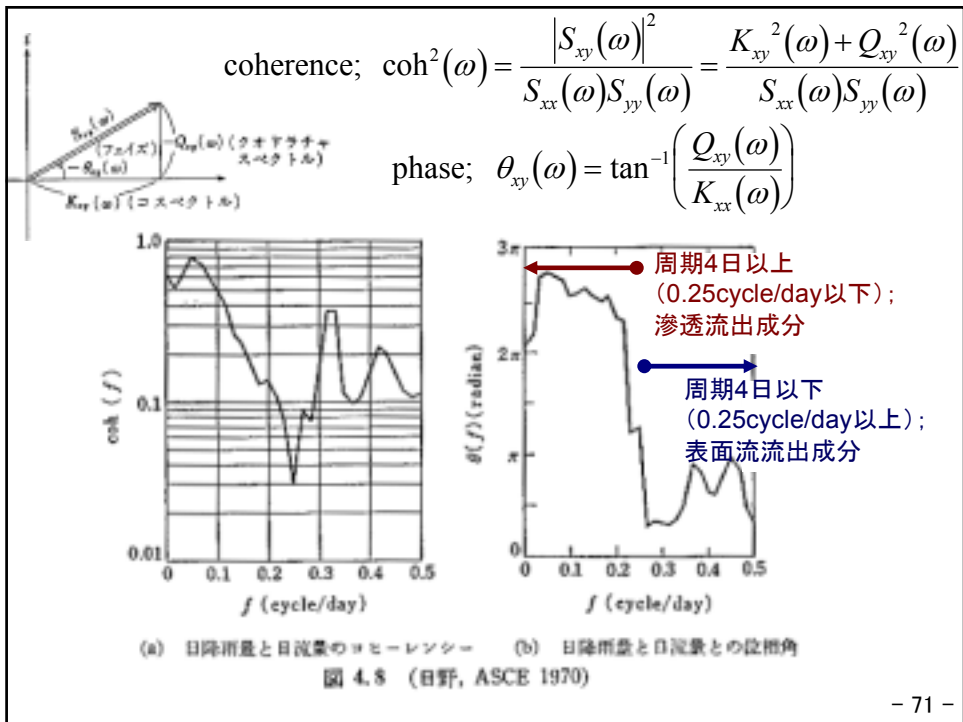
Wiener-Khinchineの公式



	原 形	自己相関	関数	$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ (two-sided)
1			$C(x) = A^2$	$P(f) = \delta(f)$
2			$C(x) = A^2 \delta(\tau)$	$P(f) = A^2$
3	$a(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ マロウフ過程 または、変調周波数 $\omega_0$ の ワットソン-ヤン過程 (平 均値交流成分 $\omega = \omega_0$ )		$C(x) = A^2 e^{-\alpha \tau }$	$P(f) = \frac{2A^2}{\alpha} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$
4			$C(x) = \frac{A^2}{2} \cos 2\omega\tau$	$P(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - \omega)$
5			$C(x) = \frac{A^2}{2} e^{-\alpha \tau } \cos 2\omega\tau$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2(f - \omega)^2} + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2(f + \omega)^2} \right]$
6	4ワットソン-ヤン過程に ランダム・ステップ関数 または、ハイナリ過程		$C(x) = \begin{cases} (B) -  tD  & ( t  \leq D) \\ 0 & ( t  > D) \end{cases}$	$P(f) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \pi f D}{\pi f} \right)^2$
7	乱れ成分を過した 白色雑音		$C(x) = 2A^2 \left( \frac{\sin 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0 \tau} \right)$	$P(f) \begin{cases} = A^2 & (0 < f < B) \\ = 0 & (B < f < 2B) \end{cases}$
8	帯域成分を過した 白色雑音		$C(x) = 2A^2 \left( \frac{\sin \pi f_0 \tau}{\pi f_0 \tau} \right) \cos 2\pi f_1 \tau$	$P(f) \begin{cases} = A^2 & (0 < f < (B/2) + (f_1 - B/2)) \\ = 0 & (f < (B/2) - (f_1 - B/2) \text{ or } f > (B/2) + (f_1 + B/2)) \end{cases}$

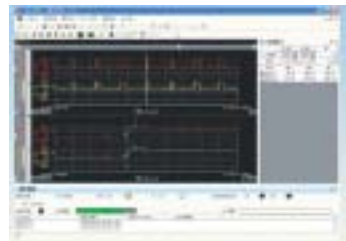
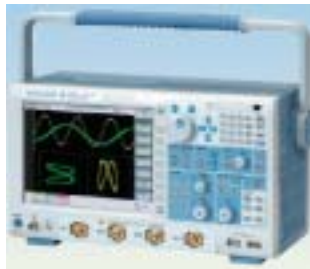


- : 通常の乱流格子<sup>(21)</sup>  
 $Re = 1.56 \times 10^6, R_\lambda = 25$
- ▲ : 大型加工風洞 (Kistler et al<sup>(5)</sup>)  
 $Re = 2.4 \times 10^6, R_\lambda = 669$
- : 動物乱流格子 (Makita<sup>(21)</sup>)  
 $Re = 1.56 \times 10^6, R_\lambda = 390$
- ▽ : 超大型風洞 (Sakaguchi et al<sup>(21)</sup>),  $R_\lambda = 1450$
- : 超大型風洞 (Gagne et al<sup>(21)</sup>),  $R_\lambda = 2720$
- △ : 煙管 (Grant et al<sup>(22)</sup>),  $Re = 10^6, R_\lambda > 2000$
- : 大気乱流 (佐々木<sup>(23)</sup>),  $R_\lambda = 2010$



(d) 記録計 (recorder)

- ペンレコーダ (pen recorder)
- XYレコーダ (XY recorder)
- オシロスコープ (cathode-ray oscilloscope)
- トランジェントレコーダ (digital waveform recorder)
- 磁気テープ記録・再生器 → 磁気記録 (ハードディスク)



↑ PCへ(データ処理・解析など)



(横河電機HPより)

## 5. 計測系の特性

### 5.1 静特性

**静特性** (static characteristics) :

時間的に変化しない入力信号に対する計測系の出力信号の特性

**感度** (sensitivity, sensibility) :

$$\text{感度} = \frac{\text{出力信号の変化}}{\text{入力信号の変化}}$$

**直線性** (linearity) :

図5.1 参考

$$\text{直線度} = \frac{B}{A} \times 100 \quad [\%]$$

**ヒステリシス差** (hysteresis error) :

図5.2 参考

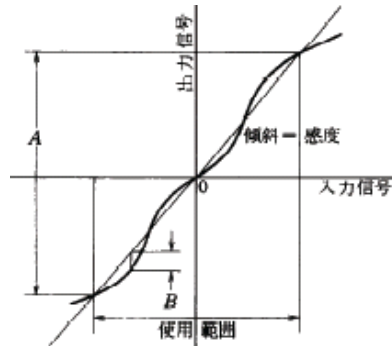


図5.1 直線性

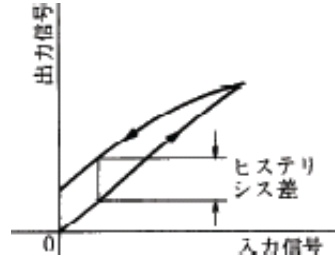


図5.2 ヒステリシス

- 73 -

### 5.2 伝達関数

**計測系の応答解析**

計測系の入力信号と出力信号の関係を微分方程式で表現した数学モデルを作成し、計測系の応答特性を解析する

(例) 液柱温度計による温度測定 (図5.3参考)

- 温度計と周囲の間の熱流
- 温度計の指示値の時間変化

$$q = \frac{\theta_i - \theta_o}{R}$$

$$q = C \frac{d\theta_o}{dt}$$

$\theta_i$  : 周囲の温度 (測定量)

$\theta_o$  : 指示値である温度

$q$  : 周囲から温度計への熱流

$R$  : 熱流に対する抵抗

$C$  : 温度計の熱容量

- 温度計の指示値の時間変化に関する微分方程式

$$T \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = \theta_i \quad \text{ここに, } T = RC$$

- 微分演算子  $D = d/dt$  を用いると,

$$(TD + 1)\theta_o = \theta_i \quad \therefore \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{TD + 1}$$

- **伝達関数** (transfer function) : 伝達関数 =  $\frac{\text{出力信号}}{\text{入力信号}}$

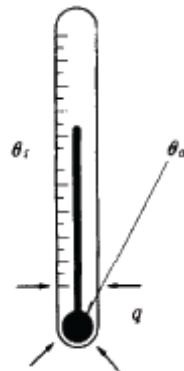


図5.3 液柱温度計

- 74 -

・伝達関数の一般的表現

$$\frac{x_o}{x_i} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0} \quad \text{ここに, } D^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

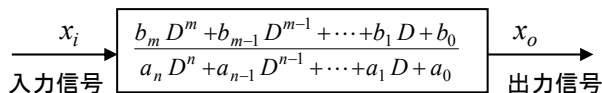


図5.4 ブロック線図

### 5.3 計測系の動特性

**動特性** (dynamic characteristics) :

計測系の入力信号が変動するときの出力信号の特性

**動誤差** (dynamic error) : 入力信号と出力信号の差

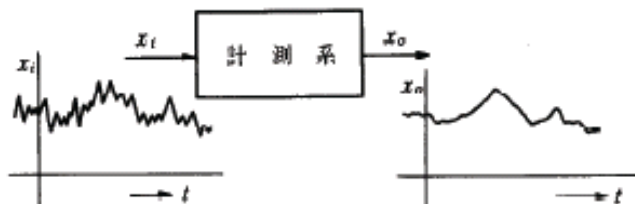


図5.5 計測系の動特性

#### 過渡応答 (transient response)

(a) **ステップ応答** (step response) :

入力信号がステップ的に変化するときの計測系の応答

i) **一次遅れ系のステップ応答**

(前出の液柱温度計のような場合)

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{TD + 1}$$

**一次遅れ系** : 伝達関数の分母が  $D$  の一次式

上式の一般解は,

$$\theta_o = k e^{-\frac{t}{T}} + A$$

初期条件を  $\theta_o(0) = 0$  とすれば,

$$\theta_o = A \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

ここに,  $T$  : 時定数

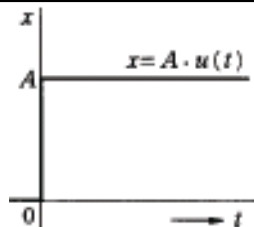


図5.6 ステップ応答

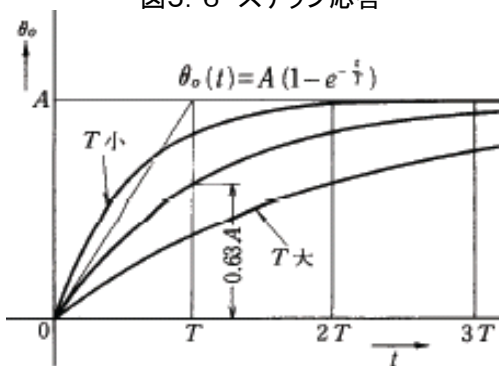


図5.7 一次遅れ系のステップ応答

## ii) 二次遅れ系のステップ応答

### (例)バネとダンパを有する質点の強制振動

(図5. 8参考)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f - kx - B \frac{dx}{dt}$$

$m$  : 質量                       $B$  : ダンパの粘性減衰係数  
 $k$  : バネのバネ定数       $f$  : 外力(入力信号)  
 $x$  : 変位(出力信号)

従って、入力信号と出力信号との関係は次式で表される。

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{mD^2 + BD + k} = \frac{K\omega_n^2}{D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2}$$

ここに、 $\zeta$  : 減衰比       $\omega_n$  : 固有角周波数

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{mk}} \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad K = \frac{1}{k}$$

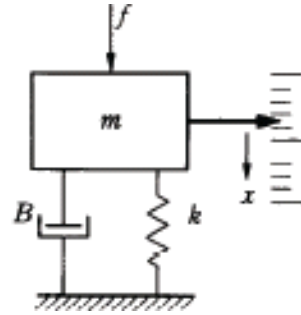


図5. 8 二次遅れ系の例

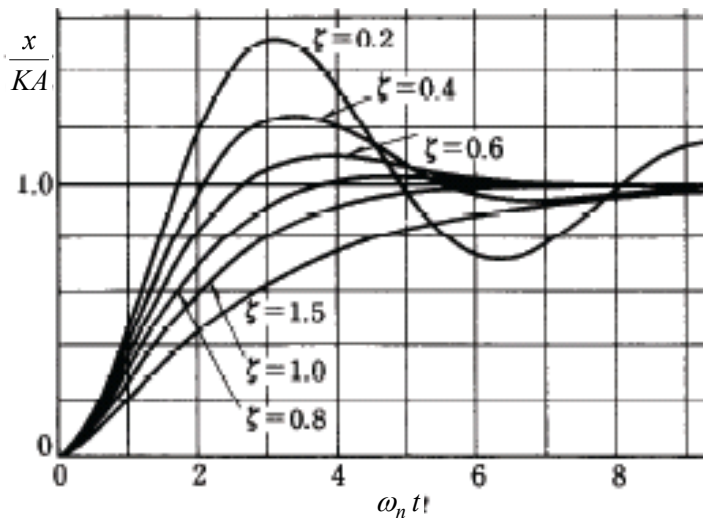


図5. 9 二次遅れ系のステップ応答  
 ( $t < 0$ で:  $f = 0$  ,  $t \geq 0$ で:  $f = A$ )

(b) 周波数応答 (frequency response) :

入力信号として  $x_i = A \cos \omega t$  を加えたときの計測系の応答  
 定常状態では出力信号は  $x_o = B \cos(\omega t + \varphi)$  となる。

入力信号の振幅  $A$  を一定として、周波数  $\omega$  を変えると、出力信号の振幅  $B$  と  
 位相  $\varphi$  は変化

定常状態における  $B/A$  と  $\varphi$  が  $\omega$  によってどのように変化？

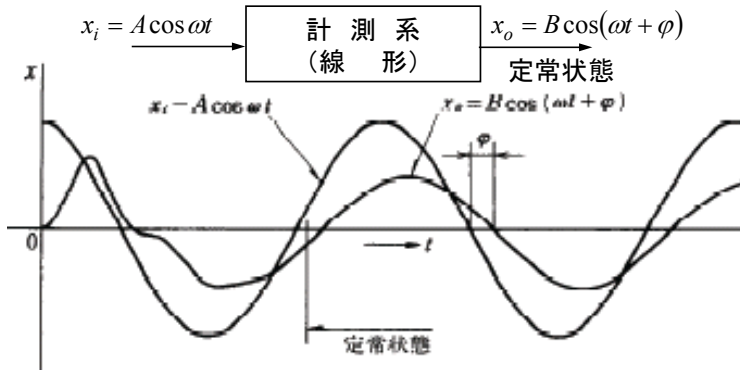
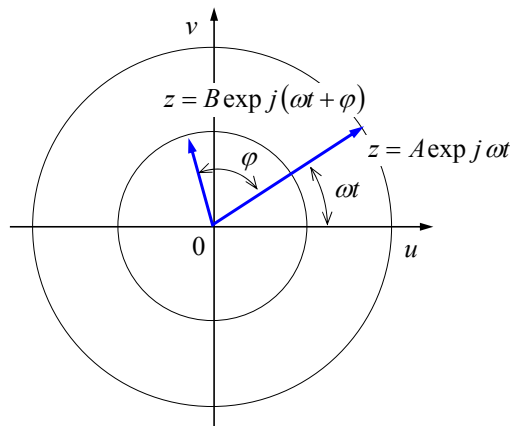
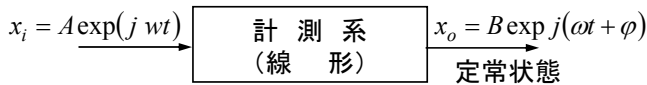


図5. 10 正弦波に対する応答

複素関数による周波数応答の取り扱い

入力信号が  $x_i = A \exp j \omega t$  のとき、定常状態での出力信号は  $x_o = B \exp j(\omega t + \varphi)$



※ 指数関数 (複素数)  
 $z = u + jv$   
 $= \exp(x + jy)$   
 $= e^x (\cos y + j \sin y)$   
 $u = e^x \cos y$   
 $v = e^x \sin y$

図5. 11 入出力の複素数表示



### i) 一次遅れ系の周波数応答

一次遅れ系の伝達関数は、

$$\frac{x_o}{x_i} = \frac{1}{TD+1}$$

この系に入力信号  $x_i = A \exp j \omega t$  を加えたときの出力信号を  $x_o = B \exp j(\omega t + \varphi)$  とすれば、

$$(j\omega T + 1)B \exp j(\omega t + \varphi) = A \exp j \omega t$$

$$\frac{B}{A} \exp j\varphi = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

よって、

$$\text{振幅比: } \frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}, \quad \text{位相: } \varphi = -\tan^{-1} \omega T$$

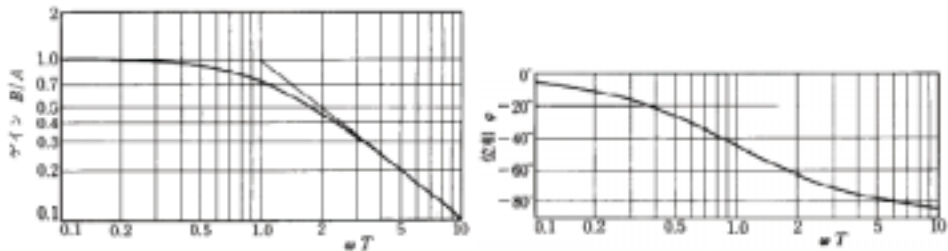


図5.12 一次遅れ系の周波数応答特性

### i) 二次遅れ系の周波数応答

二次遅れ系の伝達関数は、 $\frac{x_o}{x_i} = \frac{\omega_n^2}{D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2}$

従って、入出力の関係は、 $[(\omega_n^2 - \omega^2) + 2j\zeta\omega_n\omega]B e^{j\varphi} = \omega_n^2 A$

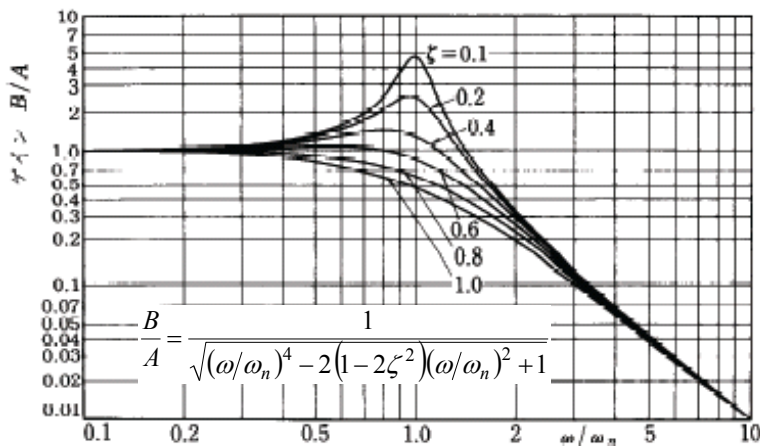


図5.13 二次遅れ系の周波数応答特性

## 6. 各種物理量の計測法

### 6.1 温度測定 (編(社)計測自動制御学会:新編温度計測より)

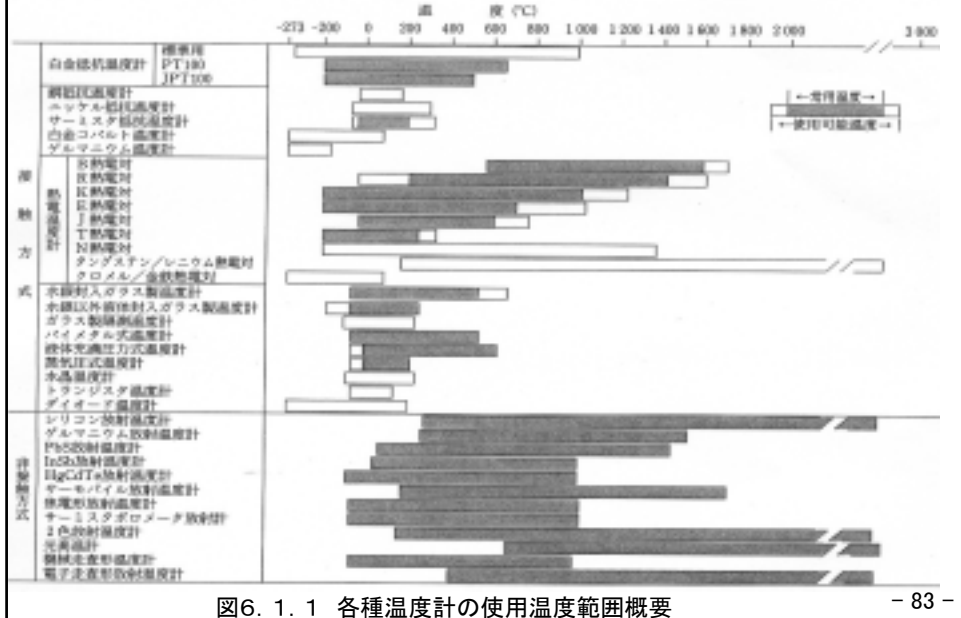


図6. 1. 1 各種温度計の使用温度範囲概要

- 83 -

(a) **熱電温度計**: 熱電対 (Thermocouple) を検出端として使用する温度計

#### 熱電対の原理:

2種類の金属両端を電氣的に接続して閉回路を作り, 両端の接点に温度差があると回路中に電流が流れる(起電力-熱起電力が生ずる)現象を応用

→ Seebeck効果: 1821年発見

#### 熱電対熱起電力特性:

(1) 均質回路の法則, (2) 中間金属の法則, (3) 中間温度の法則

- 均質回路の法則 -

- ・ 単独の均質な金属導体からなる回路では局部的に加熱しても熱起電力は生じない
- ・ 熱起電力は熱電対の両接点の温度差により定まり, 途中の温度分布にはよらない

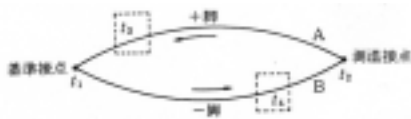


図6. 1. 2 均質回路の法則

- 中間金属の法則 -

- ・ いくつかの異なった金属導体で組み立てられた回路の熱起電力の和は回路全体の温度が等しければ零

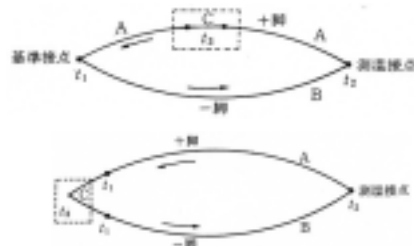


図6. 1. 3 中間金属の法則 - 84 -

- 中間温度の法則 -

- ・熱電対両接点の温度  $t_1, t_2$  → 熱起電力:  $E_{12}$
- ・熱電対両接点の温度  $t_2, t_3$  → 熱起電力:  $E_{23}$



- ・熱電対両接点の温度  $t_1, t_3$  → 熱起電力:  $E_{13}$

$$E_{13} = E_{12} + E_{23}$$

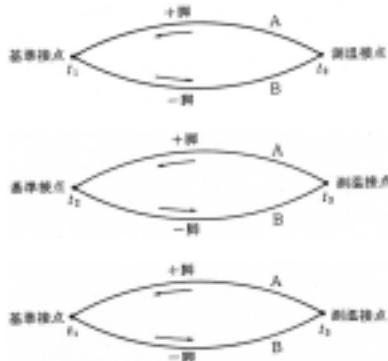


図6. 1. 4 中間温度の法則

- 材質による熱起電力の加算 -

- ・金属導体AとCの起電力 → 熱起電力:  $E_{AC}$
- ・金属導体CとBの起電力 → 熱起電力:  $E_{CB}$



- ・金属導体AとBの起電力 → 熱起電力:  $E_{AB}$

$$E_{AB} = E_{AC} + E_{CB} = E_{AC} - E_{BC}$$

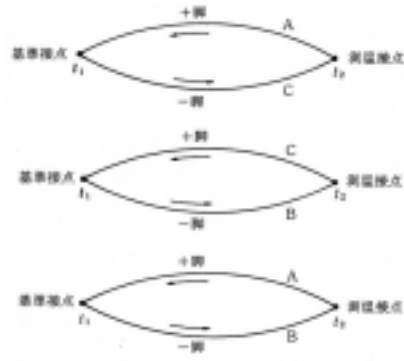


図6. 1. 5 材質による起電力の加算

表6. 1. 1 主な金属・合金の対白金熱起電力(温度差: 100 K)

金属・合金名	熱起電力 (mV/100°C)	金属・合金名	熱起電力 (mV/100°C)
Bi	-7.34	Ir	+0.67
コンスタンタン	-3.5	Cu	+0.77
Ni	-1.48	Ag	+0.79
Co	-1.33	Au	+0.79
アルメル	-1.29	Cd	+0.90
Pd	-0.57	W	+1.12
Ta	+0.33	Mo	+1.31
Al	+0.42	Fe	+1.88
Sn	+0.44	ニクロム	+2.20
Pb	+0.44	クロメル	+2.81
マンガン	+0.61	Ge	+33.9
Rh	+0.65	Te	+44.8

基準接点を 0°C に保ち、+ 符号の場合は電流が Pt 中を基準接点より温度接点に向かって流れる。- 符号はその反対を示す。

- 材質による熱起電力の加算 -

- ・銅+コンスタンタン :  $E_{AB} = 0.77 - (-3.5) = 4.27$  (mV/100 K)
- ・鉄+コンスタンタン :  $E_{AB} = 1.88 - (-3.5) = 5.38$  (mV/100 K)
- ・クロメル+アルメル :  $E_{AB} = 2.81 - (-1.29) = 4.10$  (mV/100 K)

表6. 1. 2 熱電対の構成材料と測定温度・許容差

分類	構成材料の記号	構成材料		測定温度* [°C]	精度 (級)	許容差**
		+脚	-脚			
貴金属 熱電対	B	Rh30%を含むPt, Rh合金	Rh4%を含むPt, Rh合金	600以上 1700未満	0.5	±4°Cまたは 測定温度の±0.5%
	R	Rh13%を含むPt, Rh合金	Pt	0以上 1600未満	0.25	±1.5°Cまたは 測定温度の±0.25%
	S	Rh10%を含むPt, Rh合金	Pt	0以上 1600未満	0.25	±1.5°Cまたは 測定温度の±0.25%
卑金属 熱電対	K	Ni及びCeを 主とした合金	Niを主とした 合金	0以上 1000未満	0.4	±1.5°Cまたは 測定温度の±0.4%
				0以上 1300未満	0.75	±2.5°Cまたは 測定温度の±0.75%
				-200以上 0未満	1.5	±2.5°Cまたは 測定温度の±1.5%
	E	Ni及びCeを 主とした合金	Cu及びNiを 主とした合金	0以上 800未満	0.4	±1.5°Cまたは 測定温度の±0.4%
				0以上 800未満	0.75	±2.5°Cまたは 測定温度の±0.75%
				-200以上 0未満	1.5	±2.5°Cまたは 測定温度の±1.5%
	J	Fe	Cu及びNiを 主とした合金	0以上 750未満	0.4	±1.5°Cまたは 測定温度の±0.4%
				0以上 750未満	0.75	±2.5°Cまたは 測定温度の±0.75%
	T	Cu	Cu及びNiを 主とした合金	0以上 350未満	0.4	±0.5°Cまたは 測定温度の±0.4%
				0以上 350未満	0.75	±1°Cまたは 測定温度の±0.75%
				-200以上 0未満	1.5	±1°Cまたは 測定温度の±1.5%

\* 測定温度は素線径  
によって異なる  
\*\*許容差はいずれか  
大きい方

(b) 測温抵抗体: 電気抵抗の温度依存性を応用した温度計

白金測温抵抗体:

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2)$$

ここに,  $\begin{cases} A = 3.90802 \times 10^{-3} \text{ [}^\circ\text{C}^{-1}\text{]} \\ B = -5.802 \times 10^{-7} \text{ [}^\circ\text{C}^{-2}\text{]} \end{cases}$



図6. 1. 6 白金測温抵抗体  
(標準温度計)

(c) サーミスタ測温体: 半導体電気抵抗の温度依存性を応用した温度計

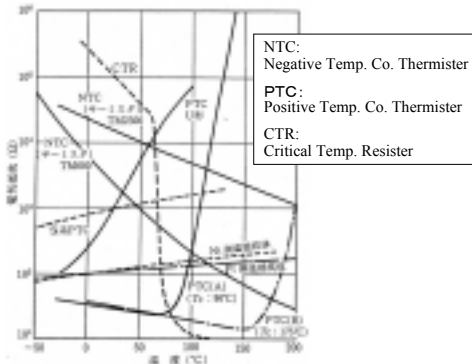


図6. 1. 7 感温半導体及び測温抵抗体の温度特性

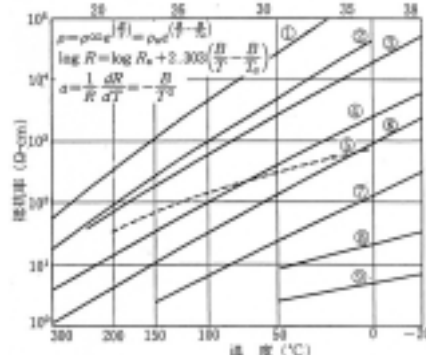


図6. 1. 8 代表的なサーミスタ測温体  
の温度特性

(d) 熱放射を利用した温度計: プランクの放射の法則を応用した温度計

プランクの放射の法則

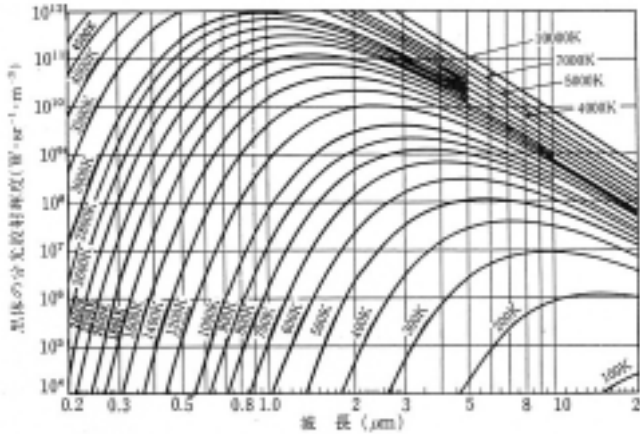


図6. 1. 9 黒体の分光放射輝度

分光放射輝度

$$L(\lambda, T) = \frac{2C_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

$$C_1 = c_0^2 h = 5.9548 \times 10^{-17} \text{ [W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-5}]$$

$$C_2 = \frac{c_0 h}{k} = 1.4388 \times 10^{-2} \text{ [W} \cdot \text{K} \cdot \text{m}]$$

ウィーンの変位測

$$(\lambda T)_{\max} = 2897.8 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

黒体の全放射に対する放射輝度

$$L_e(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

$$\sigma = 5.6696 \times 10^{-8} \text{ [W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}]$$

$\lambda T \leq (\lambda T)_{\max}$  の領域: ウィーンの公式

$$L(\lambda, T) = \frac{2C_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right)$$

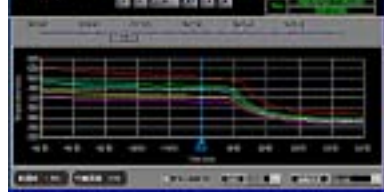
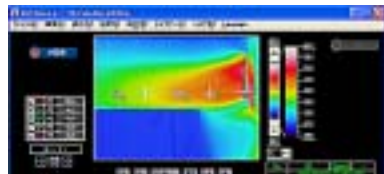
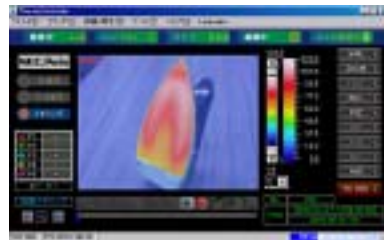
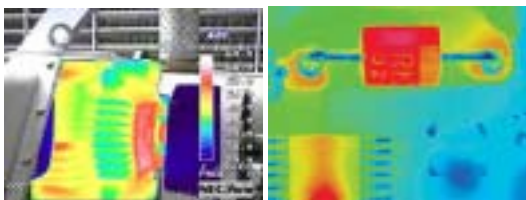
$\lambda T \gg (\lambda T)_{\max}$  の領域: レイリー・ジーンズの公式

$$L(\lambda, T) = \frac{2C_1 T}{C_2 \lambda^4}$$

表6. 1. 3 放射温度計の種類

形式	原理	検出素子
全放射温度計	熱電形	サーモパイル (TE) ボロメータ (TC) 熱電素子
部分放射温度計 単色放射温度計	光電形 光高温計形	光電管, 光電子増倍管 (PE) PbS, Ge, InSb (PC) Si, InAs, InSb, HgCdTe (PV) 内臓, 光電子増倍管
二色温度計	可視 2 色 赤外 2 色	Si, Ge, 光電子増倍管 PbS
走査放射温度計 (1 次元, 2 次元)	機械式走査 電子式走査	ボロメータ, InSb, Ge(Au), HgCdTe 赤外ビジコン, CCD
半球鏡付表面温度計		サーモパイル, Si

TE: 熱起電力形, TC: 熱導電形, PV: 光起電力形  
PC: 光導電形, PE: 光電効果形



## 6.2 圧力測定 (土屋喜一編: 大学課程 計測工学 (第3版), オーム社より)

### (a) 圧力の基準点と単位

#### 圧力の基準点:

- ①絶対圧力: 絶対真空を基準として測る(略号: abs, a)
- ②ゲージ圧: 刻々と変動する大気圧を基準として測る(略号: gage, g)
- ③差圧: 特定の圧力を基準として測る

#### 圧力の単位:

Pa(パスカル), bar(バール), kgf/cm<sup>2</sup>(重量kg), atm(標準大気圧=1atm), mmH<sub>2</sub>O(水柱), mmHg(水銀柱)

表6. 2. 1 慣用されている圧力の単位換算

Pa	bar	kgf/cm <sup>2</sup>	atm	mmH <sub>2</sub> O	mmHg
1	1×10 <sup>-5</sup>	1.019 72×10 <sup>-5</sup>	9.869 23×10 <sup>-4</sup>	1.019 72×10 <sup>-1</sup>	7.500 62×10 <sup>-3</sup>
1×10 <sup>6</sup>	1	1.019 72	9.869 23×10 <sup>-1</sup>	1.019 72×10 <sup>6</sup>	7.500 62×10 <sup>3</sup>
9.806 65×10 <sup>4</sup>	9.806 65×10 <sup>-1</sup>	1	9.678 41×10 <sup>-1</sup>	1×10 <sup>6</sup>	7.355 59×10 <sup>3</sup>
1.013 25×10 <sup>5</sup>	1.013 25	1.033 23	1	1.033 23×10 <sup>6</sup>	7.600 00×10 <sup>3</sup>
9.806 65	9.806 65×10 <sup>-4</sup>	1×10 <sup>-4</sup>	9.678 41×10 <sup>-4</sup>	1	7.355 59×10 <sup>-3</sup>
1.333 22×10 <sup>5</sup>	1.333 22×10 <sup>-1</sup>	1.359 51×10 <sup>-3</sup>	1.315 79×10 <sup>-3</sup>	1.359 51×10 <sup>3</sup>	1

- 91 -

### (b) 液柱圧力計

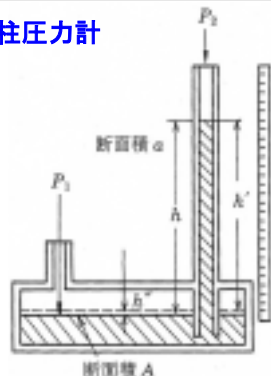


図6. 2. 1 単管式(箱形)圧力計

差圧 $\Delta P$ がかかり, 槽内の液位が $h'$ だけ下がり, 単管の液位が加圧前の位置から $h'$ だけ上昇して釣り合うと,

$$Ah'' = ah' \quad \therefore h'' = \frac{a}{A} h'$$

加圧前の位置を基準として目盛ると, 実際には $h''$ だけ差が出る. この時の縮尺率は,

$$C = \frac{h'}{h} = \frac{h'}{h' + h''} = \frac{1}{1 + a/A}$$

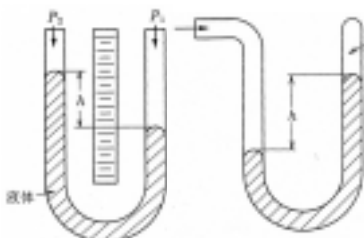


図6. 2. 2 U字管式圧力計

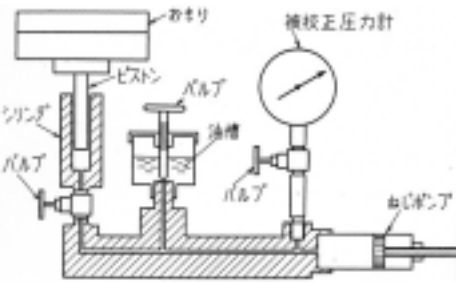


図6. 2. 3 重錘型圧力計

- 92 -

(b) 弾性形圧力計

①ブルドン管式, ②ベローズ式, ③ダイヤフラム式

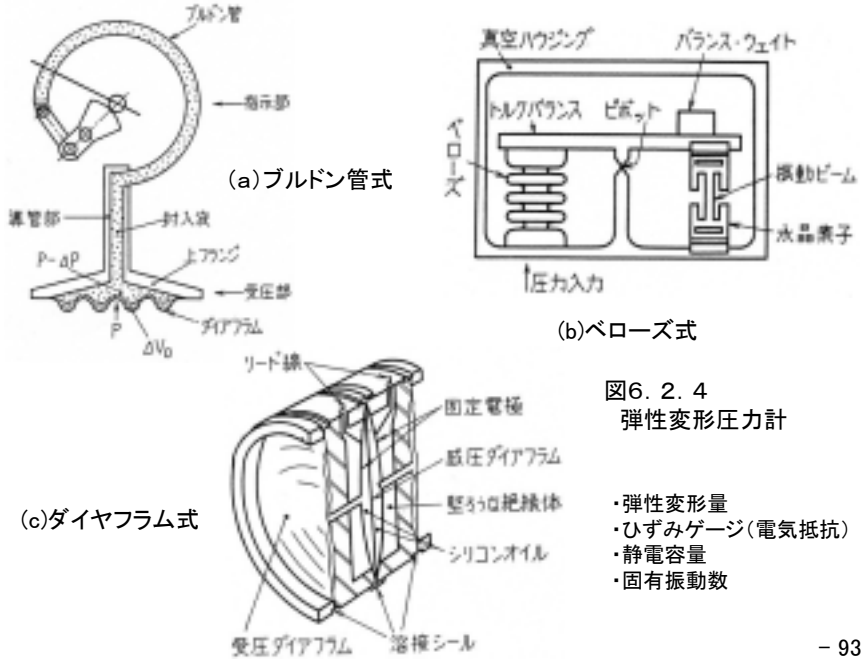


図6.2.4 弾性変形圧力計

- ・弾性変形量
- ・ひずみゲージ(電気抵抗)
- ・静電容量
- ・固有振動数

6.3 流速・流量測定 (土屋喜一編: 大学課程 計測工学 (第3版), オーム社より)

(a) 差圧式流量計

管路内に絞りを挿入してその前後の圧力差より流量を求める(絞り部の断面積は一定).

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

$$q_m = A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho$$

従って,

$$q_m = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}$$

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

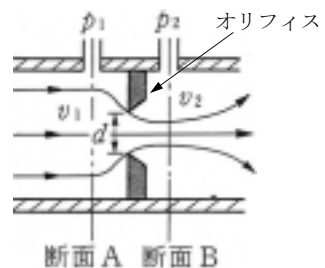


図6.3.1 差圧式流量計の原理

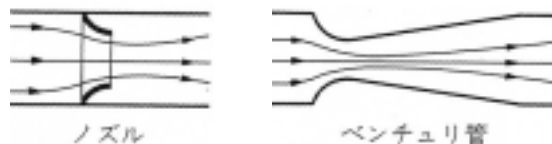
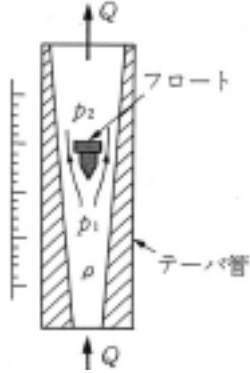


図6.3.2 絞り機構



**(b) 面積式流量計**

絞り前後の圧力差を一定として、絞り部の断面積変化より流量を求める。



フロート前後の圧力差と重力とのバランス

$$(\rho_f - \rho)V_f g = (p_1 - p_2)S_f$$

体積流量は、差圧式流量計と同様に、

$$Q = \alpha S_g \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

従って、

$$Q = \alpha S_g \sqrt{\frac{2(\rho_f - \rho)V_f g}{\rho S_f}}$$

図6. 3. 3 面積式流量計

**(c) ピトー管**

ベルヌーイの定理より、

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = p_0, \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

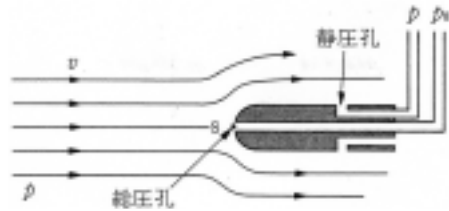


図6. 3. 4 ピトー管

**(d) カルマン渦流量計**

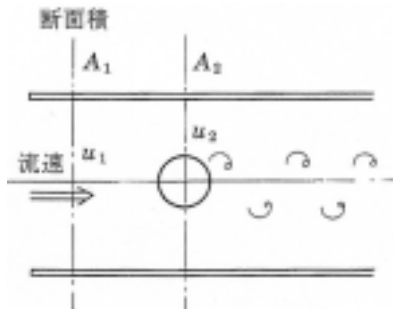


図6. 3. 5 カルマン渦流量計

ストロハル数  $Sr$  は  $Re_d = \frac{ud}{\nu} = 10^2 \sim 10^5$

で一定であるので、

$$Sr = \frac{f d}{u} = \text{一定値}$$

従って、  $u_1 A_1 = u_2 A_2, \quad f = Sr_2 \frac{u_2}{d}$

以上より、

$$Q = \frac{A_2 d}{Sr_2} f$$

渦の周波数  $f$  は、管路内の障害物の流れに直交する方向の圧力差の変動より求める。

**(e) 容積式流量計**



図6. 3. 6 容積式流量計(積算流量)



(f) ドップラー流速計

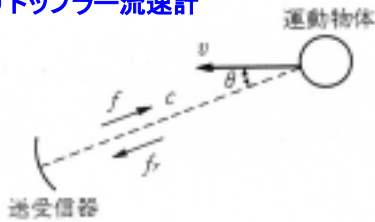


図6. 3. 7 ドップラー流速計の原理

ドップラー周波数  $f_d$  は,

$$f_d = f_r - f = 2f \frac{v}{c} \cos \theta$$

従って,

$$v = \frac{c f_d}{2 f \cos \theta}$$

※ 光, 電波, 超音波など.

(g) 超音波流量計

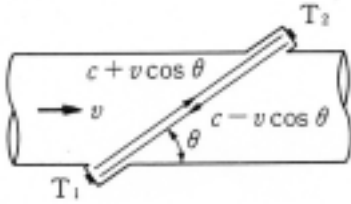


図6. 3. 8 超音波流量計の原理

超音波の伝播時間は,

$$t_1 = \frac{L}{c + v \cos \theta}, \quad t_2 = \frac{L}{c - v \cos \theta}$$

従って,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2Lv \cos \theta}{c^2 - (v \cos \theta)^2} \approx \frac{2Lv \cos \theta}{c^2}$$

以上より, 
$$v = \frac{c^2 \Delta t}{2Lv \cos \theta}$$

(h) 熱線流速計

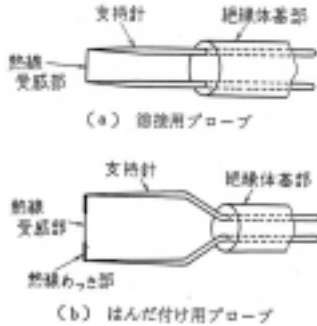


図6. 3. 9 熱線プローブ

熱線のエネルギー収支式は,

$$i^2 R_w - (T_w - T)(a + bv^n) = C_w \frac{dT_w}{dt}$$

定常の場合,

$$i^2 R_w = (T_w - T)(a + bv^n)$$

※定温度形と定電流形

(i) 電磁流量計

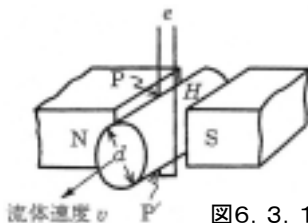


図6. 3. 10 電磁流量計の原理

ファラデーの電磁誘導の法則より,

$$e = H d \bar{v}$$

従って,

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \bar{v} = \frac{\pi d}{4H} e$$